Arbeidsnotater

STATISTISK SENTRALBYRÅ

IO 68/3 Oslo, 16. februar 1968

LIKNINGSSYSTEMET I DEN ØKONOMISKE ANALYSEMODELL MODIS III

av

Olav Bjerkholt

I n n h o l d Side

1. Innledning

MODIS III er den tredje i rekken av Statistisk Sentralbyrås økonomiske analysemodeller i MODIS-serien. Disse modellene har i hovedtrekk det samme relasjonsinnhold. Kjernen i modellene er en enkel kryssløpsmodell og en makrokonsumfunksjon. Mens MODIS I var en modell med bare kvantumsvariable, inneholder MODIS II relasjoner også for priser og inntekter. MODIS III er en videre utbygging av MODIS II med særlig vekt på større fleksibilitet når det gjelder utnytting av modellens relasjoner, og med vesentlig kortere beregningstid. Modellens hovedtrekk er framstilt og drøftet annet sted i tilknytning til MODIS I og MODIS II.[1)]

Dette notatet tar sikte på å gi en presis beskrivelse av likningssystemet i MODIS III. I alt vesentlig gir framstillingen nedenfor en beskrivelse av modellen slik den foreligger ved årsskiftet 1967 - 1968. Notatet gir ikke særlig innblikk i andre sider ved modellen enn den rent formelle oppbygging som kommer til uttrykk gjennom modellens likningssystem. De variable er gjennomgående bare angitt ved summariske betegnelser. Det gis ingen presis spesifisering og definisjon av de variable, men begrepsinnholdet i dem og de viktigste logiske sammenhenger mellom dem vil framgå av den tekstlige kommentaren.

De teoretiske relasjoner i modellen er heller ikke gitt noen bred omtale i denne framstillingen. De er omtalt utførlig nok til at man kan se logikken, men de er ikke drøftet eller begrunnet.

---

1) En oversikt over modellene er gitt bl.a. i:

P.J. Bjerve: Utviklingstendensar i den kvantitative økonomiske planlegginga i Noreg. Sosialøkonomen, spesialnummer, februar 1965.

P.J. Bjerve: Teknisk revolusjon i økonomisk analyse og politikk. Artikler fra Statistisk Sentralbyrå, nr. 18, 1966.

MODIS I er beskrevet og drøftet i:

Per Sevaldson: En produksjons- konsumkryssløpsmodell for økonomisk planlegging i Norge. Statsøkonomisk tidsskrift 1962.

Per Sevaldson: An Interindustry Model of Production and Consumption for Economic Planning in Norway. Income and Wealth. Series X. London 1964.

MODIS II er nærmere beskrevet i:

Arne Øien: MODIS II. En samfunnsøkonomisk modell med kryssløps-, konsum- og prisrelasjoner. Arbeidsnotater fra Statistisk Sentralbyrå IO 66/3.

Per Sevaldson: A short term model for planning in Norway. Arbeidsnotater fra Statistisk Sentralbyrå IR 66/3.

Begreper og metoder i nasjonalbudsjett~~arbeidet~~ ingen. Vedlegg 1 i Nasjonalbudsjettet 1966.

De grunnleggende trekk i modellen framstilles i en noe forenklet form i avsnittene 4 - 6 på bakgrunn av visse empiriske og teoretiske forutsetninger som gjøres i avsnitt 2 og 3, der også de viktigste symbolene introduseres. Hvert av avsnittene 7 - 10 behandler et spesielt trekk ved modellen som ikke er tatt med i den forenklete presentasjon i avsnitt 4 - 6. En samlet oppstilling av likningssystemet er gitt i avsnitt 11. I avsnitt 12 er det beskrevet noen hovedtrekk av løsningsprosedyren for likningssystemet.

2. Nasjonalregnskap og definisjonssammenhenger

Den sentrale del i modellens struktur er et detaljert nasjonalregnskap for realøkonomien. De sentrale variable i modellen er definert ut fra de enkelte posteringer i nasjonalregnskapet, fortrinnsvis som pris- og mengdeindekser for kontosummer i regnskapet. De fleste koeffisienter i modellen er fastlagt ved hjelp av regnskapstall for et basisår.[2)]

Modellens nasjonalregnskap kan beskrives med utgangspunkt i en stor kryssløpstabell som for hver av 142 produksjonssektorer angir de ressurser som går med i produksjonen , og som angir hvordan bruttoproduksjonen i sektoren fordeles til vareinnsats i de andre sektorene og til sluttlevering (konsum, bruttoinvestering, eksport).

---

2) Estimeringen av koeffisienter til kryssløpsrelasjonene utgjør en integrert del av de automatiserte regnerutinene i modellen. Den særdeles enkle estimeringsmetoden som nå anvendes, avledet av strukturrelasjonene i avsnitt 3, kan selvsagt tenkes erstattet av bedre og mer kompliserte metoder. Men i så fall er det rimelig å anta at koeffisientene må estimeres særskilt for prisberegninger og for kvantumsberegninger.
Basisår for beregning av koeffisienter vil være det sist avsluttede kalenderår. Nasjonalregnskapet for dette året vil imidlertid delvis bygge på talloppgaver som går opptil tre år tilbake.

Skjematisk kan modellens nasjonalregnskap stilles opp på følgende måte:

	j=1,..,142	j=1,..,294	
i=1,..,142	X_{ij}	Y_{ij}	L_i
i=1,..,153	X^B_{ij}	Y^B_{ij}	L^B_i
	E_j		
	W_j		
	R_j		
	D_j		
	S_j		
	T_j		

De størrelser som inngår i skjemaet ovenfor, kan for vårt formål betraktes som verditall for økonomiske transaksjoner i et basisår. Arten av transaksjonene framgår av definisjonene nedenfor:

(2.1) X_{ij} = Vareinnsats levert fra sektor i til sektor j (i,j=1,..,142)

(2.2) Y_{ij} = Sluttleveringer (ekskl. lagerendring) levert fra sektor i til sluttleveringspost j (i=1,..,142 j=1,..,294)

(2.3) L_i = Lagerendring av produkter fra sektor i (i=1,..,142)[3]

---

3) Lagerendring er skilt ut fra de øvrige sluttleveringer for å få klarere fram enkelte trekk i modellen. Med sluttleveringsposter menes i det følgende bare poster som inngår i sluttleveringer ekskl. lagerendring.

(2.4) X_{ij}^{B} = Vareinnsats levert fra importgruppe i til sektor j (i=1,..,153 j=1,..,142)

(2.5) Y_{ij}^{B} = Sluttlevering (ekskl. lagerendring) levert fra importgruppe i til sluttleveringspost j (i=1,..,153 j=1,..,294)

(2.6) L_{i}^{B} = Lagerendring av produkter fra importgruppe i (i=1,..,153)

(2.7) E_j = Bruttoprodukt (primærinnsats) i sektor j (j=1,..,142)

Dobbeltstreken i skjemaet under linjen for E_j antyder at størrelsene under streken er komponenter av E_j. Bruttoproduktet har følgende komponenter:

(2.8) W_j = Lønn til sysselsatte i sektor j (j=1,..,142)

(2.9) R_j = Eierinntekt til selskaper og selvstendige i sektor j (j=1,..,142)

(2.10) D_j = Kapitalslit i sektor j (j=1,..,142)

(2.11) S_j = Subsidier mottatt av sektor j (j=1,..,142)[4)]

(2.12) T_j = Indirekte skatter betalt av sektor j (j=1,..,142)

Det som er kalt for modellens nasjonalregnskap ovenfor, har en meget nær tilknytning til Statistisk Sentralbyrås løpende nasjonalregnskap for Norge. Modellens regnskap er en redigering av dette med tillegg av visse utfyllende data. En nærmere omtale av dette vil bli gitt i et eget notat. Det må spesielt nevnes i tilknytning til definisjonene ovenfor at for enkelhets skyld er det blant importgruppene tatt med størrelser som ikke har noe med import å gjøre bortsett fra at de behandles formelt på samme måte. Dette gjelder blant annet visse overføringsposter og subsidier og indirekte skatter i omsetningsleddet.

Det regnskapet vi arbeider med, er et avstemt regnskap. En del relasjoner vil være oppfylt pr. definisjon. Vi definerer først noen linje- og kolonnesummer:

$$(2.13) \quad X_i = \sum_{j=1}^{142} X_{ij} + \sum_{j=1}^{294} Y_{ij} + L_i \qquad (i=1,..,142)$$

X_i er verdien av de samlede leveranser fra sektor i.

---

4) Subsidier regnes med negativt fortegn, jfr. (2.17).

$$(2.14) \quad Y_j = \sum_{i=1}^{142} Y_{ij} + \sum_{i=1}^{153} Y_{ij}^B \qquad (j=1,..,294)$$

Y_j er den samlede verdi av sluttleveringspost j.

$$(2.15) \quad B_i = \sum_{j=1}^{142} X_{ij}^B + \sum_{j=1}^{294} Y_{ij}^B + L_i^B \qquad (i=1,..,153)$$

B_i er verdien av de samlede leveranser fra importgruppe i.

Verdien av de samlede leveranser fra en sektor vil være lik summen av det sektoren mottar av vareinnsats (fra innenlandske sektorer og fra import) og sektorens egen primærinnsats.

$$(2.16) \quad X_j = \sum_{i=1}^{142} X_{ij} + \sum_{i=1}^{153} X_{ij}^B + E_j \qquad (j=1,..,142)$$

Verdien av bruttoproduktet i hver sektor vil være lik summen av verdiene av komponentene.

$$(2.17) \quad E_i = W_i + R_i + D_i \div S_i + T_i \qquad (i=1,..,142)$$

Til slutt i dette avsnittet skal vi definere forholdstall av verdier fra nasjonalregnskapet i b a s i s å r e t.

$$(2.18) \quad \lambda_{ij} = \frac{X_{ij}}{X_j} \qquad (i=1,..,142 \quad j=1,..,142)$$

$$(2.19) \quad \lambda_{ij}^Y = \frac{Y_{ij}}{Y_j} \qquad (i=1,..,142 \quad j=1,..,294)$$

$$(2.20) \quad \lambda_{ij}^B = \frac{X_{ij}^B}{X_j} \qquad (i=1,..,153 \quad j=1,..,142)$$

$$(2.21) \quad \lambda_{ij}^{BY} = \frac{Y_{ij}^B}{Y_j} \qquad (i=1,..,153 \quad j=1,..,294)$$

$$(2.22) \quad \lambda_i^E = \frac{E_i}{X_i} \qquad (i=1,..,142)$$

$$(2.23) \quad \lambda_i^W = \frac{W_i}{X_i} \qquad (i=1,..,142)$$

$$(2.24) \quad \lambda_i^R = \frac{R_i}{X_i} \qquad (i=1,..,142)$$

$$(2.25) \quad \lambda_i^D = \frac{D_i}{X_i} \qquad (i=1,..,142)$$

$$(2.26) \quad \lambda_i^S = \frac{S_i}{X_i} \qquad (i=1,..,142)$$

$$(2.27) \quad \lambda_i^T = \frac{T_i}{X_i} \qquad (i=1,..,142)$$

3. Strukturrelasjoner og sentrale variable

Med modellens sentrale variable menes de variable som defineres i tilknytning til kryssløpsoppstillingen. De variable er uttrykt som e n d r i n g i forhold til basisåret. De sentrale variable faller naturlig i to grupper, prisvariable og kvantumsvariable. De prisvariable er relative prisendringer i forhold til basisåret.[5] De mengdevariable er endringer i verdistørrelser målt i basisårets priser. De sentrale prisvariable i modellen er listet nedenfor:

(3.1)	Δp_i =	relativ prisendring i sektor i	(i=1,..,142)
(3.2)	Δp_{Yi} =	relativ prisendring i slutt-leveringspost i	(i=1,..,294)
(3.3)	Δp_{Bi} =	relativ prisendring i import-gruppe i	(i=1,..,153)
(3.4)	Δp_{Li} =	relativ prisendring for lager-endring av produkter fra sektor i	(i=1,..,142)
(3.5)	$\Delta p_{L_B i}$ =	relativ prisendring for lager-endring av produkter fra importgruppe i	(i=1,..,153)
(3.6)	Δp_{Ei} =	relativ prisendring av brutto-produkt i sektor i	(i=1,..,142)
(3.7)	Δp_{Wi} =	relativ endring i utbetalt lønn pr. enhet produsert i sektor i	(i=1,..,142)
(3.8)	Δp_{Ri} =	relativ endring i eierinntekt pr. enhet produsert i sektor i	(i=1,..,142)

5) Alle priser er lik 1 i basisåret. Derfor blir $\frac{\Delta p}{p} = \Delta p$.

(3.9) Δp_{Di} = relativ prisendring for kapitalslit i sektor i (i=1,..,142)

(3.10) Δp_{Si} = relativ endring i subsidier pr. enhet produsert i sektor i (i=1,..,142)

(3.11) Δp_{Ti} = relativ endring i indirekte skatter pr. enhet produsert i sektor i (i=1,..,142)

I det følgende vil de elleve grupper av prisvariable som er definert ovenfor, bli skrevet på vektorform (linjevektorer) med følgende symboler:

Δp, Δp_Y, Δp_B, Δp_L, Δp_{L_B}, Δp_E, Δp_W, Δp_R, Δp_D, Δp_T, Δp_S

De sentrale kvantumsvariable tilsvarer de seks første vektorer av prisvariable.

(3.12) ΔX_i = endring målt i basisårets priser av bruttoproduksjon i sektor i (i=1,..,142)

(3.13) ΔY_i = endring målt i basisårets priser av sluttleveringspost i (i=1,..,294)

(3.14) ΔB_i = endring målt i basisårets priser av importgruppe i (i=1,..,153)

(3.15) ΔL_i = endring målt i basisårets priser av lagerendring av produkter fra sektor i (i=1,..,142)

(3.16) ΔL_{Bi} = endring målt i basisårets priser av lagerendring av produkter fra importgruppe i (i=1,..,153)

(3.17) ΔE_i = endring målt i basisårets priser av bruttoprodukt i sektor i (i=1,..,142)

På vektorform skrives de kvantumsvariable ovenfor som kolonnevektorer med følgende betegnelser: ΔX, ΔY, ΔB, ΔL, ΔL_B og ΔE.

Modellens strukturrelasjoner er relasjoner som foreskriver faste forholdstall mellom visse elementer i kryssløpstabellen.

Ovenfor definerte vi pris- og kvantumskomponenter for linje- og kolonnesummer, bygget opp ved hjelp av pris- og kvantumskomponenter for elementene i det indre av tabellen. Vi skal ikke innføre betegnelser for disse "indre" komponentene, da de ikke skal benyttes eksplisitt i det følgende. De to sett av strukturrelasjoner som gjelder mellom disse komponentene, kan enklest formuleres på følgende måte:

(I) <u>Priskomponenter i samme linje i kryssløpstabellen endrer seg proporsjonalt</u>

(II) <u>Kvantumskomponenter i samme kolonne i kryssløpstabellen endrer seg proporsjonalt</u>

Forutsetning (I) i n k l u d e r e r i k k e linjene for bruttoproduktet og dets komponenter og forutsetning (II) i n k l u d e r e r i k k e lagerendringskolonnen.

Forutsetningene (I) og (II) gjør det mulig å erstatte alle variable med dobbelt fotskrift med koeffisienter bestemt fra basisårets regnskapstall.

Den grunnleggende prislikning i modellen uttrykker prisendringen for en sektors bruttoproduksjon som en sammenveining av prisendringer for det sektoren mottar av vareinnsats og primærinnsats, der vektene er den relative fordeling av mottatte leveranser i basisåret. Forutsetningen om vektene i sammenveiningen gjør prisindeksen for en sektors bruttoproduksjon til en Laspeyre indeks. Men ifølge (II) vil vektene være konstante, slik at det her er uvesentlig hvilken prisformel man følger.

Ifølge (I) må prisendringene for mottatt vareinnsats i en sektor være lik prisendring for den sektor eller importgruppe som leverer vareinnsatsen. Altså kan vi da skrive prislikningene slik:

$$(3.18) \qquad \Delta p_j = \sum_{i=1}^{142} \Delta p_i \lambda_{ij} + \sum_{i=1}^{153} \Delta p_{Bi} \lambda_{ij}^{B} + \Delta p_{Ej} \lambda_{Ej} \qquad (j=1,..,142)$$

En tilsvarende likning gjelder for prisendring av en sluttleveringspost.

$$(3.19) \qquad \Delta p_{Yj} = \sum_{i=1}^{142} \Delta p_i \lambda_{ij}^{Y} + \sum_{i=1}^{153} \Delta p_{Bi} \lambda_{ij}^{BY} \qquad (j=1,..,294)$$

Prisendringene for lagerendring må ifølge (I) være lik den tilsvarende prisendring for leveranser til lager fra vedkommende sektor eller importgruppe.

$$\Delta p_{Li} = \Delta p_i \qquad (i=1,..,142) \tag{3.20}$$

$$\Delta p_{L_B i} = \Delta p_{Bi} \qquad (i=1,..,153) \tag{3.21}$$

Den grunnleggende definisjonsmessige kvantumslikning uttrykker at en sektors bruttoproduksjonsendring er lik den samlede endring i sektorens leveranser til vareinnsats og sluttleveringer. Ifølge (II) vil leveransene fra en sektor til en annen sektor være proporsjonale med totalsummen i mottakerkolonnen. Vi kan derfor skrive kvantumslikningene slik:

$$\Delta X_i = \sum_{j=1}^{142} \lambda_{ij} \, \Delta X_j + \sum_{j=1}^{294} \lambda_{ij}^{Y} \, \Delta Y_j + \Delta L_i \qquad (i=1,..,142) \tag{3.22}$$

En tilsvarende likning gjelder for importendring og for bruttoproduktendring

$$\Delta B_i = \sum_{j=1}^{142} \lambda_{ij}^{B} \, \Delta X_j + \sum_{j=1}^{294} \lambda_{ij}^{BY} \, \Delta Y_j + \Delta L_{Bi} \qquad (i=1,..,294) \tag{3.23}$$

$$\Delta E_i = \lambda_i^{E} \, \Delta X_i \qquad (i=1,..,142) \tag{3.24}$$

Ved å introdusere vektor- og matrisenotasjon kan likningene (3.18) - (3.24) skrives på en mer kompakt form. Vi definerer først

$$\Lambda = \{\lambda_{ij} \; ; \quad i=1,..,142 \quad j=1,..,142\} \tag{3.25}$$

$$\Lambda_Y = \{\lambda_{ij}^{Y} \; ; \quad i=1,..,142 \quad j=1,..,294\} \tag{3.26}$$

$$\Lambda_B = \{\lambda_{ij}^{B} \; ; \quad i=1,..,153 \quad j=1,..,142\} \tag{3.27}$$

$$\Lambda_{BY} = \{\lambda_{ij}^{BY} \; ; \quad i=1,..,153 \quad j=1,..,294\} \tag{3.28}$$

(3.29) Λ_E = matrise av dimensjon 142 · 142 der elementene i diagonalen er lik λ_i^E og elementene ellers er null.

(3.30) Λ_W, Λ_R, Λ_D, Λ_S og Λ_T er diagonalmatriser definert på tilsvarende måte som Λ_E.

Likningene (3.18) – (3.24) kan nå skrives om slik:

(3.31) $\Delta p = \Delta p \Lambda + \Delta p_B \Lambda_B + \Delta p_E \Lambda_E$

(3.32) $\Delta p_Y = \Delta p \Lambda_Y + \Delta p_B \Lambda_{BY}$

(3.33) $\Delta p_L = \Delta p$

(3.34) $\Delta p_{L_B} = \Delta p_B$

(3.35) $\Delta X = \Lambda \Delta X + \Lambda_Y \Delta Y + \Delta L$

(3.36) $\Delta B = \Lambda_B \Delta X + \Lambda_{BY} \Delta Y + \Delta L_B$

(3.37) $\Delta E = \Lambda_E \Delta X$

4. Priser

Den grunnleggende prislikning i modellen er (3.31). Denne vektorlikningen består av 142 relasjoner og inkluderer 2 . 142 + 153 = 437 variable. Den har altså 295 frihetsgrader. I den enkleste versjon av denne modellen tas alle priskomponentene for importen og for bruttoproduktet, dvs. Δp_B og Δp_E for gitte. Av (3.31) kan da Δp løses, og deretter kan Δp_Y bestemmes ved (3.32). Den enkle modellen kan altså stilles opp slik, der størrelser merket med toppskrift $\overset{\uparrow}{*}$ er eksogent gitt.

$$(4.1)\qquad \Delta p = \Delta p\Lambda + \Delta p_B^{*}\Lambda_B + \Delta p_E^{*}\Lambda_E$$

$$(4.2)\qquad \Delta p_Y = \Delta p\,\Lambda_Y + \Delta p_B^{*}\Lambda_{BY}$$

$$(4.3)\qquad \Delta p_L = \Delta p$$

$$(4.4)\qquad \Delta p_{L_B} = \Delta p_B^{*}.$$

Modellen (4.1) - (4.4) kan kalles en ren overveltningsmodell. Alle kostnader forutsettes å bli overveltet i produksjons- og sluttleveringsprisene. Som kostnader inngår her også profitt eller eierinntekt pr. enhet produsert.

Denne overveltningsmodellen kan være tilfredsstillende for sektorer som i det store og hele har et beskyttet innenlandsk marked, slik at kostnadsendringer kan overveltes i produktprisen.[6] Slike sektorer betegnes her *konkurranseskjermede sektorer*.

For andre sektorer er det rimelig å betrakte eierinntekten pr. enhet produsert som en residual størrelse bestemt som differensen mellom en utenfra gitt pris og summen av beregnede øvrige enhetskostnader. Dette gjelder i første rekke de sektorer som produserer i sterk konkurranse med utlandet, de *konkurranseutsatte sektorer*.[7] For disse vil verdensmarkedet bestemme produktprisen. En annen viktig gruppe av sektorer for hvilke overveltningsmodellen er lite tilfredsstillende er de sektorer der det offentlige har sterk innflytelse på prisutviklingen (*prisregulerte sektorer*).[8] Både for de konkurranseutsatte og for de prisregulerte sektorene er det mer rimelig å la produktprisen være eksogent gitt og til gjengjeld la eierinntekten pr. enhet produsert bli bestemt i modellen.

Formelt deles altså sektorene i to grupper, overveltningssektorer

---

6) Dette kan synes ubegrunnet da slike næringer kan være utsatt for sterk konkurranse på hjemmemarkedet. Historiske tall synes imidlertid å indikere at eierinntekten pr. enhet produsert svinger omkring et normalnivå for disse næringene. Realistisk bruk av modellen innebærer at anslagene for endring i eierinntekt pr. enhet produsert for disse næringene tar hensyn til de aktuelle avsetningsforholdene og den innbyrdes konkurranse.

7) De konkurranseutsatte sektorer omfatter bl.a. Utenriks sjøfart, Tekstil- og bekledningsindustri, Tobakkindustri, Cellulosefabrikker, Skogbruk og Lufttransport.

8) Bl.a. Brennevinstilvirkning, Boliger, Jordbruk og Jernbane.

og priseksogene sektorer. Inndelingen innføres i modellen ved en diagonalvektor Γ_s av dimensjon 142 der elementene er lik 1 for alle overveltningssektorer og lik 0 for alle andre.

Det kreves nå to nye vektorer av eksogene størrelser,

(4.5) $\Delta p^* = \begin{cases} 0 \text{ for alle overveltningssektorer} \\ \text{relativ endring i produksjonspris for alle andre sektorer} \end{cases}$

(4.6) $\Delta p_R^* = \begin{cases} \text{relativ endring i eierinntekt pr. enhet produsert,} \\ \text{for alle overveltningssektorer} \\ 0 \text{ for alle andre sektorer} \end{cases}$

I modelloppstillingen nedenfor er Δp_E splittet i enkelte komponenter.

(4.7) $\Delta p_E \Lambda_E = \Delta p_W \Lambda_W + \Delta p_R \Lambda_R + \Delta p_D \Lambda_D + \Delta p_S \Lambda_S + \Delta p_T \Lambda_T$

Komponentene i Δp_E er altså nå alle eksogene bortsett fra en del av elementene i Δp_R.

Den utvidede modellen kan nå stilles opp slik:

(4.8) $\Delta p = (\Delta p\Lambda + \Delta p_B^* \Lambda_B + \Delta p_W^* \Lambda_W + \Delta p_R^* \Lambda_R + \Delta p_D^* \Lambda_D + \Delta p_S^* \Lambda_S + \Delta p_T^* \Lambda_T)\Gamma_s + \Delta p^*$

(4.9) $\Delta p_E \Lambda_E = \Delta p - \Delta p\Lambda - \Delta p_B^* \Lambda_B$

(4.10) $\Delta p_R \Lambda_R = \Delta p_E \Lambda_E - \Delta p_W^* \Lambda_W - \Delta p_D^* \Lambda_D - \Delta p_S^* \Lambda_S - \Delta p_T^* \Lambda_T$

(4.11) $\Delta p_Y = \Delta p \Lambda_Y + \Delta p_B^* \Lambda_{BY}$

(4.12) $\Delta p_L = \Delta p$

(4.13) $\Delta p_{L_B} = \Delta p_B^*$

Systemet (4.8) - (4.13) kan nå løses suksessivt i den rekkefølge likningene er stilt opp. Dette systemet er i hovedtrekk prismodellen i MODIS III. To komplikasjoner er ikke tatt med ovenfor. Den første gjelder prisberegningen for kapitalslit. I MODIS III er prisendringen for kapitalslit ikke en eksogen variabel, men en sammenveining av prisendringer for investeringsvarer. Dette er nærmere omtalt i avsnitt 9. Den andre komplikasjonen gjelder innkalkulering av verdiavgifter, dvs. avgifter som beregnes proporsjonalt med verdi (ikke mengde). Slike avgifter finnes både for produksjon og for omsetning. I modellen tas det hensyn til slike avgifter. Dette er nærmere omtalt i avsnitt 10 nedenfor.

5. Konsum

Av etterspørselsrelasjoner inneholder modellen bare relasjoner for etterspørselen etter privat konsum. Privat konsum er oppdelt i 47 poster. Verdiendringen i faste priser for hver enkelt post er enten eksogent gitt eller en funksjon av pris- og inntektsutviklingen. Prismodellen vil alltid kunne løses før konsumberegningen, slik at alle størrelser både eksogene og endogene som inngår i prismodellen, kan betraktes som predeterminerte for konsum- og produksjonsberegningene.

I framstillingen foran inngår konsumendring som en subvektor av ΔY, og relativ endring av konsumpriser som en subvektor av Δp_Y. Vi innfører nå egne betegnelser for dem.

(5.1) ΔC_i = verdiendring regnet i basisårets priser for konsumpost i, $i=1,..,47$

(5.2) Δp_{Ci} = relativ prisendring for konsumpost i, $i=1,..,47$

For endringer i konsumpost nr. i forutsettes følgende relasjon å gjelde:

(5.3) $$\Delta C_i = \mu_i \Delta C_{end} + \sum_{j=1}^{46} \eta_{ij} \frac{\Delta p_{Cj} - \Delta \bar{p}_C}{1 + \Delta \bar{p}_C} + \Delta C_i^{*} \quad \text{9)} \quad i=1,..,47$$

9) Det inngår her 47 konsumposter, men bare 46 relative priser. Konsumpost nr. 47 er "Utlendingers konsum i Norge", en negativ korreksjonspost som bestemmes eksogent. Utlendingers faktiske konsum i Norge blir registrert under de forskjellige konsumposter.

Koeffisientene μ_i (i=1,..,47) og η_{ij} (i=1,..,47, j=1,..,46) er nærmere forklart nedenfor.

I alt 8 av de 47 konsumposter forutsettes eksogent gitt. Disse postene inngår i ΔC_i^*. For disse postene er μ_i og η_{ij} (j=1,..,46) satt lik null.[10] For alle poster som ikke er eksogene, er ΔC_i^* lik null.

(5.4) ΔC_{end} = samlet endring av endogent privat konsum

(5.5) $\Delta \bar{p}_C$ = relativ endring av prisindeks for summen av privat konsum og utlendingers konsum i Norge

(5.6) μ_i, i=1,..,47 koeffisienter som fordeler samlet endogent konsum på de enkelte poster $\sum_{i=1}^{47} \mu_i = 1$

(5.7) η_{ij}, i=1,..,47, j=1,..,46 koeffisienter som angir virkning på konsumpost i av endring i relative priser og som er avstemt slik at følgende relasjon gjelder for alle prisendringer:

$$\sum_{i,j} \eta_{ij} \frac{\Delta p_{Cj} - \Delta \bar{p}_C}{1 + \Delta \bar{p}_C} = 0 \quad 11)$$

---

10) Dette utelukker ikke at prisendringer for de eksogene konsumposter påvirker endringene i de øvrige konsumposter.

11) Koeffisientene μ_i og η_{ij} har nær sammenheng med Engel- og Cournot-elastisiteter.

E_i = elastisitet av konsumpost i med hensyn på total konsumutgift.

e_{ij} = elastisitet av konsumpost i med hensyn på prisen på konsumpost j.

Ut fra disse størrelser kan μ_i og η_{ij} defineres på følgende måte:

$$\mu_i = C_i \cdot E_i / \sum_i C_i$$

$$\eta_{ij} = C_i \cdot e_{ij}$$

Relasjon (5.3) er basert på følgende utvikling for endring av konsumpostene i omegnen av basisårets nivå:

$$\frac{\Delta C_i}{C_i} = (E_i \cdot \frac{\Delta C_{utg}}{C_{utg}} + \sum_j e_{ij} \cdot \Delta p_{Cj}) \frac{1}{1 + \Delta p_C},$$

der ΔC_{utg} og C_{utg} er henholdsvis endring og nivå for samlet konsumutgift.

Størrelsen ΔC_{end} forutsettes å være avhengig av utviklingen i realdisponibel inntekt fordelt på de to inntektsarter, lønn og eierinntekt. I uttrykket for ΔC_{end} inngår foruten $\Delta \bar{p}_C$ følgende variable:

(5.8) ΔW_0 = samlet endring i lønnsbeløp

(5.9) ΔR_0 = samlet endring i eierinntekt

(5.10) ΔT_W = samlet endring i skatter, trygder og stønader for lønnstakere

(5.11) ΔT_R = samlet endring i skatter, trygder og stønader for selvstendige [12]

Dessuten inngår følgende parametre:

(5.12) α = marginal konsumtilbøyelighet for lønnstakere

(5.13) β = marginal konsumtilbøyelighet for eierinntekt

Disse størrelsene inngår i en makrokonsumfunksjon, som har følgende form:[13]

(5.14) $$\Delta C_{end} = \frac{1}{1+\Delta \bar{p}_C} (\alpha\ (\Delta W_0 - \Delta T_W) + \beta\ (\Delta R_0 - \Delta T_R) - \Delta \bar{p}_C$$

$$(\alpha\ (W_0 - T_W) + \beta\ (R_0 - T_R)))$$

Konsumrelasjonene omfatter altså alt i alt 48 relasjoner, en makrosumfunksjon (5.14) og 47 relasjoner for konsumposter (5.3).

---

12) T_W og T_R er lik (skatter + trygder - stønader) for henholdsvis lønnstakere og selvstendige.

13) Denne relasjonen er avledet av en estimert relasjon på formen

$$C_{end} = \alpha \cdot \frac{W - T_W}{p_C} + \beta \cdot \frac{R - T_R}{p_C} + \text{konstant}$$

6. Produksjon og etterspørsel [14]

Modellens beregning av produksjonsmengder er basert på likning (3.35). Denne vektorlikningen består av 142 relasjoner og inkluderer (2· 142+ 294)= 578 variable. Den har altså 436 frihetsgrader. I den enkleste versjon av modellen tas alle etterspørselskomponenter, dvs. ΔY og ΔL som gitt. Bruttoproduksjonsendring, ΔX, kan da løses av (3.35). ΔB og ΔE bestemmes deretter av (3.36) og (3.37).

Den enkle kvantumsmodellen kan altså stilles opp slik:

(6.1) $\Delta X \quad = \Lambda \Delta X + \Lambda_Y \, \Delta Y^* + \Delta L^*$

(6.2) $\Delta B \quad = \Lambda_B \, \Delta X + \Lambda_{BY} \, \Delta Y^* + \Delta L_B^*$

(6.3) $\Delta E \quad = \Lambda_E \, \Delta X$

Modellen (6.1) - (6.3) kan kalles en ren etterspørselsmodell. All etterspørsel etter sluttleveringer er eksogent gitt, og bruttoproduksjonen bestemmes som summen av leveransene til vareinnsats og sluttleveringer. Modellen tar bl.a. ikke hensyn til eventuelle kapasitetsskranker.

For en del sektorer er det mer rimelig å la bruttoproduksjonsendringer være eksogent gitt enn bestemt av etterspørsel via kryssløpskoeffisientene. Dette gjelder først og fremst sektorer der naturforholdene har avgjørende innvirkning på produksjonen. Det gjelder også sektorer der en antar at utnyttelsen av den eksisterende kapasitet vil være lite påvirket av den aktuelle etterspørsel.[15]

Vi deler altså sektorene i to grupper, etterspørselsbestemte sektorer og produksjonsanslagssektorer. Inndelingen er gitt ved en diagonalmatrise Γ_e der elementene er 1 for etterspørselsbestemte sektorer og 0 for produksjonsanslagssektorene. Det kreves nå i tillegg en vektor av eksogen bruttoproduksjonsendring.

---

14) I dette avsnittet betraktes sluttleveringene (ekskl. lagerendring) som helt eksogene. Sammenkoplingen med konsumrelasjonene skjer først i avsnitt 11.

15) I denne gruppen er bl.a. Jordbruk, Skogbruk, Fiske, Cellulosefabrikker, Kull- og mineraloljeforedling og Aluminiumsverk.

$\Delta X^{*} = \{$ 0 for etterspørselsbestemte sektorer
bruttoproduksjonsendring for produksjonsanslagssektorer

Hvis vi fortsatt lar alle sluttleveringsendringer være eksogene, vil det generelt oppstå et avvik mellom den beregnede etterspørselsendring og den eksogent gitte bruttoproduksjonsendring for produksjonsanslagssektorene. For å gi plass i modellen for slike avvik innfører vi en ny vektor med beregnet etterspørsel for alle sektorer ΔX^{e}.

ΔX^{e} = beregnet etterspørsel for alle sektorer.

Vektoren $(\Delta X^{e} - \Delta X)$ vil pr. definisjon være lik null for alle etterspørselsbestemte sektorer. For produksjonsanslagssektorene vil $(\Delta X^{e} - \Delta X)$ uttrykke avvik mellom beregnet etterspørselsendring og anslått produksjonsendring. Dette avviket må utliknes hvis modellen skal gi balanse mellom avgang (etterspørsel) og tilgang for alle sektorstrømmer. En nærliggende mulighet er her å la visse av sluttleveringskomponentene være endogene, og slik at avvik mellom etterspørsel og anslått produksjon utliknes ved å forandre etterspørselsanslaget for en sluttleveringspost. En annen utvei er å løsne på de rigide forutsetninger om faste koeffisienter, dvs. proporsjonalitetsforutsetningene (I) og (II). Vi kan la visse input-koeffisienter bli forandret slik at avvik mellom etterspørsel og produksjon blir utliknet mot import eller bruttoprodukt eller begge deler. I modellen anvendes begge disse former for modifikasjoner av de opprinnelige forutsetninger.[16)]

Den utvidede modellen kan stilles opp slik:

$$\Delta X^{e} = \Lambda \Delta X + \Lambda_{Y} \Delta Y^{*} + \Delta L^{*} \tag{6.4}$$

$$\Delta X = \Gamma_{e} \Delta X^{e} + \Delta X^{*} \tag{6.5}$$

$$\Delta L = \Delta L^{*} - \Psi_{L} (\Delta X^{e} - \Delta X) \tag{6.6}$$

$$\Delta B = \Lambda_{B} \Delta X + \Lambda_{BY} \Delta Y^{*} + \Delta L_{B}^{*} + \Psi_{B} (\Delta X^{e} - \Delta X) \tag{6.7}$$

$$\Delta E = \Lambda_{E} \Delta X + \Psi_{E} (\Delta X^{e} - \Delta X) \tag{6.8}$$

16) Endringen i koeffisienter som foretas for å sikre at modellens resultater er avstemte, gjøres ikke eksplisitt og er heller ikke entydig bestemt av de "korreksjoner" som gjøres i modellens variable, jfr. (6.4) - (6.8).

Ψ-matrisene er transformasjonsmatriser som fordeler det samlede avvik mellom lagerendring, importendring og bruttoproduktendringen. Disse Ψ-matrisene er underlagt følgende betingelse:

(6.9) $$1_{142}\,\Psi_L + 1_{155}\,\Psi_B + 1_{142}\,\Psi_E = 1_{142}$$

der 1_n betegner en linjevektor av dimensjon n med hvert element lik 1.

Systemet (6.4) - (6.8) løses ved å substituere ΔX fra (6.5) i (6.4). Den vektorlikning som da framkommer, har 142 relasjoner og 142 ukjente (ΔX^e). ΔX bestemmes ved (6.5) og de øvige ukjente kan lett finnes av (6.6) - (6.8) når ΔX^e og ΔX er kjent.

7. Lønn, sysselsetting og produktivitet

Sysselsetting og produktivitet i modellen refererer utelukkende til gruppen lønnstakere. Sammenhengen mellom sysselsetting, produktivitet og bruttoproduksjon i sektor i er gitt ved følgende likning (som i og for seg ikke uttrykker noe annet enn definisjonen av lønnstakerproduktivitet):

(7.1) $$\frac{\Delta X_i}{X_i} = \frac{\Delta N_i}{N_i} + \Delta q_i + \frac{\Delta N_i}{N_i} \cdot \Delta q_i$$ der

(7.2) N_i = sysselsetting i sektor i i basisåret (i=1,..,142)

(7.3) ΔN_i = endring i sysselsetting i sektor i (i=1,..,142)

(7.4) Δq_i = relativ endring i produktivitet i sektor i (i=1,..,142)

Sysselsetting blir i modellen avledet fra den definitoriske sammenheng mellom et eksogent produktivitetsanslag og en i alminnelighet endogen (men eksogen for produksjonsanslagssektorene) bruttoproduksjonsendring.

Tre faktorer kan trekkes inn for å bestemme endring i lønn for hver sektor når bruttoproduksjonsendringen er gitt. De er henholdsvis forholdet mellom lønn og bruttoproduksjon i basisåret, relativ endring i lønn pr. sysselsatt og relativ endring i produksjon pr. sysselsatt. Forholdet mellom lønn og bruttoproduksjon i sektor i i basisåret betegnes λ_{Wi}.

(7.5) Δw_i = relativ endring i lønn pr. sysselsatt i sektor i (i=1,..,142)

Relativ endring i lønn pr. sysselsatt og relativ endring i produksjon pr. sysselsatt gir sammen et uttrykk for relativ endring i lønn pr. produsert enhet Δp_{Wi}.

$$(7.6) \quad \Delta p_{Wi} = \frac{\Delta w_i - \Delta q_i}{1 + \Delta q_i} \qquad (i=1,..,142)$$

Samlet endring i lønn i sektor i, ΔW_i, kan da skrives

$$(7.7) \quad \Delta W_i = (1+ \Delta p_{Wi}) \cdot \lambda_{Wi} \, (X_i + \Delta X_i) - \lambda_{Wi} X_i \qquad (i=1,..,142)$$

eller

$$(7.8) \quad \Delta W_i = \frac{\Delta w_i - \Delta q_i}{1 + \Delta q_i} \cdot \lambda_{Wi} \, (X_i + \Delta X_i) + \lambda_{Wi} \, \Delta X_i \qquad (i=1,..,142)$$

Dette uttrykket lar seg dekomponere i en del som tilskrives endring i lønn pr. sysselsatt, en del som tilskrives endring i produksjon pr. sysselsatt og en del som tilskrives endring i produksjon.

Lønnsendring som følge av endring i lønn pr. sysselsatt:

$$(7.9) \quad \Delta W_0' = \sum_{i=1}^{142} \frac{\Delta w_i}{1 + \Delta q_i} \, \lambda_{Wi} \, (X_i + \Delta X_i)$$

Lønnsendring som følge av endring i produksjon pr. sysselsatt:

$$(7.10) \quad \Delta W_0'' = \sum_{i=1}^{142} \frac{- \Delta q_i}{1 + \Delta q_i} \, \lambda_{Wi} \, (X_i + \Delta X_i)$$

Lønnsendring som følge av endring i produksjon:

$$(7.11) \quad \Delta W_0''' = \sum_{i=1}^{142} \lambda_{Wi} \, \Delta X_i$$

Samlet lønnsendring, ΔW_0, kan skrives som summen av disse komponenter,

$$(7.12) \quad \Delta W_0 = \Delta W_0' + \Delta W_0'' + \Delta W_0''' .$$

8. Skatterelasjoner

Direkte skatter, trygder og stønader blir i modellen bestemt dels ved eksogene skattebeløp og dels ved relasjoner der skattesatsene er eksogene. Skatterelasjoner anvendes bare for skatt på lønnstakere. Skatt på selvstendige og på selskaper forutsettes gitt i sin helhet ved eksogene skattebeløp. Dette skyldes ordningen med forskottsskatt for selvstendige og etterskottsskatt for selskaper. Disse ordningene gjør det rimelig å la disse skattebeløpene være eksogene på 1 - 2 års sikt.

Skatter, trygder og stønader er i modellen delt opp i et relativt stort antall arter. For lønnstakere vil det i prinsippet være tre eksogene variable forbundet med hver art av skatter, trygder og stønader (noen av disse vil imidlertid alltid være lik null). Disse er en "gjennomsnittlig marginalsats" for vedkommende skatte- eller trygdeart, t_M, en "gjennomsnittlig gjennomsnittssats", t_G, og dessuten et eksogent skatte-, trygde- eller stønadsbeløp. De to skattesatsene anvendes på endringer i det samlede lønnsbeløp slik disse er delt opp i avsnitt 7. Lønnsendring som følge av endring i lønn pr. sysselsatt, $\Delta W_0'$, beskattes med marginalsatsen, t_M, og all annen lønnsendring, $\Delta W_0''$ og $\Delta W_0'''$, med gjennomsnittssatsen, t_G. Samlet endring i skattebeløp for skatt på lønnstakere av en gitt art er derfor gitt ved

$$(8.1) \qquad \Delta Q_W = t_M \, \Delta W_0' + t_G \, \Delta W_0'' + t_G \, \Delta W_0''' + \Delta Q_W^*$$

hvor ΔQ_W^* er eksogent gitte skatte-, trygde- eller stønadsbeløp.

For skatte- og trygdearter som er uavhengige av inntektsendring, vil altså t_W og t_G være lik null, og ΔQ_W er fullstendig gitt ved ΔQ_W^*. Men også for inntektsavhengige skatte- og trygdearter kan ΔQ_W^* være forskjellig fra null, f.eks. som følge av endring i skatteregler som endrer nivået.

De tilsvarende likninger for skatt på selvstendige og på selskaper blir ganske enkelt

$$(8.2) \qquad \Delta Q_R = \Delta Q_R^*$$

$$(8.3) \qquad \Delta Q_S = \Delta Q_S^*$$

I alt fins det 36 relasjoner av typen (8.1), 36 av typen (8.2) og 60 av typen (8.3).

9. Kapitalslit

Både når det gjelder priser og volum skiller beregningen av kapitalslit seg fra de øvrige primærinnsatsfaktorene. Relasjonene er her lagt nær opp til det som praktiseres i nasjonalregnskapet. Kapitalslitprisene avledes fra prisene for bruttoinvestering i fast realkapital, og kapitalslitvolumet avledes fra volumtall for kapitalen. Kapitalen inngår riktignok ikke eksplisitt i relasjonene, men som utledningen nedenfor viser, er det et fast forhold mellom kapitalslit og kapital, og dette er utgangspunktet for beregningene.

Bruttoinvesteringene har en grovere sektoroppdeling enn den som ellers benyttes i modellen, men har i tillegg en inndeling av kapitalen for hver sektor etter art. I alt blir det på denne måten 92 bruttoinvesteringsposter.

For beregning av kapitalslitvolumet i basisåret kreves det at kapitalslitet ikke bare er gitt for hver sektor, men også etter samme sektor- og artsinndeling som bruttoinvesteringene.

(9.1) D_J = Nivåtall for kapitalslit i basisåret etter bruttoinvesteringsposter (kolonnevekter av dimensjon 92).

(9.2) ΔD_J = Endringstall for kapitalslit i basisårets priser etter bruttoinvesteringsposter. (Samme dimensjon som D_J).

(9.3) $$D = \theta_V \cdot D_J$$

der θ_V er en (142,92)-matrise med alle kolonnesummer lik 1, og D er en kolonnevektor (av dimensjon 142) som gir nivåtall for kapitalslit i basisåret etter sektor (se (2.10). Det fins entydig forbindelse fra D_J til D, men ikke omvendt.

I det følgende anvendes nå betegnelsene K^t, D_J^t, og J^t for henholdsvis kapitalbeholdning ved utgangen av år t, kapitalslit og bruttoinvestering i fast kapital i basisårets priser i år t for en gitt kapitaltype (sektor og art). Den grunnleggende forutsetning for beregningen av kapitalslitvolumet er at forholdet mellom kapitalslit i løpet av året og kapitalbeholdningen ved utgangen av året er konstant over tiden

(9.4) $$D_J^t/K^t = \delta$$

Av dette følger

(9.5) $$D_J^{t+1} = \delta K^{t+1} = \delta (K^t + J^{t+1} - D_J^{t+1})$$

Videre

(9.6) $$D_J^{t+1} = \delta/(1+\delta) \cdot (K^t + J^{t+1})$$

Endring i kapitalslitvolum fra år t til år t+1 er da gitt som

(9.7) $$\Delta D_J^{t,t+1} = D_J^{t+1} - D_J^t$$

(9.8) $$\Delta D_J^{t,t+1} = \delta/(1+\delta) \cdot (K^t + J^{t+1}) - \delta \cdot K^t$$

(9.9) $$\Delta D_J^{t,t+1} = d \cdot (J^{t+1} - D_J^t)$$

der

(9.10) $$d = \delta/(1+\delta)$$

I motsetning til beregningene av de øvrige endringstall i modellen vil formlene for endring av kapitalslitvolum avhenge av hvilket år beregningene utføres for. Kapitalslitrelasjonene utgjør derfor et dynamisk element, det eneste, i modellen. Formelen som er utledet ovenfor, gjelder bare for beregning av endring i kapitalslit et år fram fra basisåret. Beregning av kapitalslit lenger fram vil skje rekursivt ut fra den siste likningen i utledningen nedenfor

(9.11) $$\Delta D_J^{t,T} = \sum_{i=t}^{T-1} \Delta D_J^{i,i+1}$$

(9.12) $$\Delta D_J^{t,T} = d \cdot (J^T - D_J^t) + \sum_{i=t}^{T-2} d \cdot (J^{i+1} - D_J^{i+1})$$

(9.13) $$\Delta D_J^{t,T} = d \cdot (J^T - D_J^t) + \sum_{i=t}^{T-2} d \cdot (J^{i+1} - D_J^i) - d \cdot \sum_{i=t}^{T-2} \Delta D_J^{i,i+1}$$

(9.14) $$\Delta D_J^{t,T} = d \cdot (J^T - D_J^t) + (1-d) \cdot \Delta D_J^{t,T-1}$$

Data til kapitalslitrelasjonene tas fra nasjonalregnskapet for basisåret. I regnskapet utgjør D_J grunnlagsmateriale for beregning av D. Anslag for δ lages ved å ta forholdet mellom kapitalslit og kapital for hver kapitaltype. De kapitaltallene i alminnelighet ikke forefinnes i basisårets priser, anslås δ ved hjelp av tall i nasjonalregnskapets "faste priser". For tiden er dette 1961-priser. I den vanlige notasjonen av modellens relasjoner der n nå betegner antall år endringen gjelder, skrives altså relasjonene for endring av kapitalslitvolum på følgende måte

$$(9.15) \quad \Delta D^n = \theta_V \cdot \Delta D_J^n$$

$$(9.16) \quad \Delta D_J^n = d.(J-D_J) + d.\Delta J^n + (1-d)\ \Delta D_J^{n-1}$$

J og ΔJ er her subvektorer av dimensjon 92 av henholdsvis Y og ΔY.

I overensstemmelse med nasjonalregnskapet forutsetter modellen at kapitalslitprisene følger prisutviklingen for bruttoinvestering i fast realkapital. Kapitalslitprisen for hver sektor blir veid sammen av visse av bruttoinvesteringsprisene. Formelt uttrykkes dette

$$(9.17) \quad \Delta p_D = \Delta p_J \cdot \theta_P$$

der Δp_J er en subvektor av dimensjon 92 av Δp_Y.

θ_P er en (92,142)-matrise der alle kolonnesummer er lik 1. Vektene som er inneholdt i hver kolonne i θ_P beregnes som artsfordelingen av kapitalslitet i basisåret. Data for å konstruere θ_P er altså gitt i D_J.

I motsetning til bruttoproduktet vil volumet av kapitalslitet i sektor i ikke være proporsjonalt med bruttoproduksjonsendringen. I beregningen av verditallene for bruttoproduktets komponenter vil et avvik mellom relativ endring i volum av bruttoproduksjon og kapitalslit i en sektor føre til en motsvarende endring i eierinntekt.

Ved å sammenholde (9.17) med (4.8) ser en at det her er brakt inn en komplikasjon i prisløsningen. Systemet lar seg imidlertid fastsatt løse ved å substituere (9.17) i (4.8) og Δp_J (som er inneholdt i Δp_Y) fra (4.11) på høyresiden i (4.8)'. Derved inneholder (4.8) fortsatt bare Δp som ukjent vektor.

10. Indirekte skatter og subsidier

Indirekte skatter og subsidier er i modellen gitt en forholdsvis detaljert behandling. Indirekte skatter er spesifisert i 21 arter og subsidier i 14 arter. I nasjonalregnskapet er subsidier ikke fordelt etter art, og indirekte skatter er bare fordelt mellom toll og andre indirekte skatter. Som supplerende data forutsetter modellen derfor visse matriser som fordeler indirekte skatter og subsidier i basisåret. (Slik dette arbeidet for tiden utføres, vil de supplerende data ikke stemme overens med totalbeløp i nasjonalregnskapet. Dette skyldes at de supplerende data i alminnelighet vil bygge på nyere datamateriale. Det avviket som oppstår, korrigeres mot eierinntekt i de forskjellige næringer).

De enkelte arter av indirekte skatter og subsidier deles i to grupper, de som kreves opp i handelsleddet og de som kreves opp i de enkelte produksjonssektorene (ekskl. varehandel). Dette skulle være ensbetydende med et funksjonelt skille mellom omsetningsavgifter(og -subsidier) og produksjonsavgfiter (-subsidier). (Institusjonell praksis når det gjelder avgifts- og subsidieinnbetaling, avviker imidlertid fra det funksjonelle skille på visse punkter, og dette virker inn på regnskapsføringen i nasjonalregnskapet).

Modellen skiller mellom de avgifts- og subsidiearter som er proporsjonale med mengder og de som er proposjonale ved verdi. Vi betrakter altså alle arter som enten proporsjonale med en verdistørrelse eller proporsjonale med en mengdestørrelse. Modellen har foreløpig ikke relasjoner som gjør det mulig å fastsette en avgifts- eller subsidieart som et bestemt beløp uavhengig av mengde- og verdiutvikling i systemet for øvrig. Tre av de indirekte skatter behandles som verdiavgifter. Alle andre avgifter og subsidier behandles som proporsjonale med mengder. Proporsjonalitetsfaktorene for de enkelte arter settes lik produktet av det realiserte forhold i basisåret og en indeks for satsendring av vedkommende art.

Nedenfor behandles først produksjonsavgifter og -subsidier og deretter omsetningsavgifter. Vi definerer først vektorer (linjer) av endringer i satser

(10.1) Δp_H = relativ endring av avgiftssats for 21 avgiftsarter.

(10.2) Δp_K = relativ endring av subsidiesats for 14 subsidiearter.

(10.3) Δp_P = subvektor av Δp_H av dimensjon 3 som inneholder satsendringer for de tre verdiavgifter.

Videre defineres tre Λ-matriser av forholdstall fra basisåret.

(10.4) Λ_H = matrise av dimensjon (21.142) der element (i,j) er forholdet mellom avgift av art i oppkrevd i sektor j og bruttoproduksjonen i sektor j i basisåret.

(10.5) Λ_K = tilsvarende for subsidier med dimensjon (14.142).

(10.6) Λ_P = submatrise for verdiavgifter av Λ_H med dimensjon (3.142).

Verken Λ_H eller Λ_K inneholder elementer forskjellige fra null i kolonnene for varehandel. Disse avgifter og subsidier blir behandlet særskilt, jfr. nedenfor.

I avsnitt 4 ble de to vektorene for subsidier og avgifter, Δp_S og Δp_T behandlet som eksogene. Vi er nå i stand til å sette opp uttrykkene for hvordan disse vektorene er veid sammen av elementer fra Δp_H og Δp_K, for prosentavgiftene også av Δp_P.

(10.7) $\Delta p_T \Lambda_T = \Delta p_H \Lambda_H + (1_3 + \Delta p_P)\Lambda_P \hat{\Delta p}$

(10.8) $\Delta p_S \Lambda_S = \Delta p_K \Lambda_K$

I (10.7) betyr uttrykket $(1_3 + \Delta p_P)$ at 1 er addert til alle elementene i Δp_P, og $\hat{\Delta p}$ betegner diagonaliseringen av Δp.

For behandlingen av omsetningsavgifter er det nødvendig å gå litt inn på behandlingen av handelsavanser i modellens nasjonalregnskap. Alle leveranser fra en produksjonssektor eller importgruppe til en produksjonssektor eller sluttlevering er i regnskapet registrert eksklusive handelsavanse. Handelsavansen på leveransen er ført som en direkte leveranse fra sektoren varehandel til vedkommende mottakerkonto. Leveransen fra varehandel til en produksjonssektor eller sluttleveringspost er altså summen av handelsavanse på all vareinnsats som sektoren eller sluttleveringsposten har mottatt. Hvis vi antar at handelsavansen regnet i fast pris pr. enhet på den enkelte leveranse ikke endrer seg, følger det av strukturrelasjon (I) at forholdet mellom det en sektor mottar fra varehandel og den samlede bruttoproduksjon i sektoren vil være konstant regnet i basisårets priser.

I modellen er handelsavansen delt opp i en rekke handelsavanseelementer som formelt opptrer som egne produksjonssektorer. For hvert handelsavanseelement antas at forsetningen i forrige avsnitt gjelder.

Dette gjelder spesielt for avgifter og subsidier. Av de 21 avgiftsarter kreves 13 helt eller delvis opp i handelsleddet. Tilsvarende utbetales 3 av de 14 subsidiearter helt eller delvis til handelsleddet.

I framstillingen av prisberegningene i avsnitt 4 har avgiftene og subsidiene i varehandel inngått som subvektorer av importen.

(10.9) Δp_U = subvektor av Δp_H som inneholder 13 relative satsendringer for de avgiftsarter som kreves opp i handelsleddet.

(10.10) Δp_V = subvektor av Δp_K som inneholder 3 relative satsendringer for for subsidiearter som utbetales til handelsleddet.

Tilsvarende finnes det Λ-matriser for avgifter og subsidier i handelsleddet.

(10.11) Λ_U = matrise av dimensjon (13.142) der element (i,j) uttrykker forholdet mellom oppkrevd avgift i basisåret av avgiftsart i på leveranser mottatt av sektor j og bruttoproduksjonen i sektor j. Dette er en submatrise av Λ_B.

(10.12) Λ_V = tilsvarende Λ_U for subsidier. Dimensjon (3.142), submatrise av Λ_B.

(10.13) Λ_{UY} = tilsvarende avgiftsmatrise for sluttlevering. Dimensjon (13.294), submatrise av Λ_{BY}.

(10.14) Λ_{VY} = tilsvarende subsidiematrise for sluttlevering. Dimensjon (3.294), submatrise av Λ_{BY}.

Behandlingen av verdiavgifter er ikke like enkel for omsetningsavgifter som for produksjonsacgifter. Verdiavgiftene i handelsleddet er proporsjonale med verdien av leveransen til den sektor som avgiften ligger på. Det er ikke særlig grunn til å anta at avgiftsbeløpet er proporsjonalt med bruttoproduksjonsverdien i sektoren som mottar den avgiftsbelagte leveransen med mindre en av de to følgende betingelser er oppfylt: (1) de avgiftsbelagte leveranser (som kan bestå av flere enkeltposter) utgjør en helt vesentlig del av de samlede leveranser til sektoren, (2) prisene for vareinnsats og andre kostnader i sektoren endrer seg tilnærmet proporsjonalt. Det vil i alminnelighet ikke være noen grunn til å anta at (1) eller (2) er oppfylt. Som en tilnærmelse behandles derfor verdiavgifter i handelsleddet på vareinnsats (som forekommer i meget liten utstrekning) som om de var mengdeavgifter. For leveranser til sluttleveringsposter vil ofte betingelse (1) være oppfylt. For sluttleveringer beregnes derfor verdiavgifter som proporsjonale med sluttleveringspostenes verdi.

(10.15) Λ_{PY} = submatrise av Λ_{UY} for verdiavgifter. Dimensjon (3.294).

I stedet for produktet av de 16 første kolonner i Δp_B og de 16 første linjer i Λ_B får vi nå følgende uttrykk i høyresiden av prislikningene (4.8) og (4.9):

(10.16) $\Delta p_U \Lambda_U + \Delta p_V \Lambda_V$

Tilsvarende uttrykk fåes på høyresiden i likningen for sluttleveringspriser (4.11):

(10.17) $\Delta p_U \Lambda_{UY} + (1_3 + \Delta p_P)\ \Lambda_{PY}\ \hat{\Delta p}_Y + \Delta p_V \Lambda_V$

11. Likningssystemet samlet

I avsnitt 4-10 ovenfor er de enkelte sett av relasjoner i modellen beskrevet hver for seg. I dette avsnittet er de enkelte relasjoner kombinert i en samlet oppstilling. I modellens prissystem inngår følgende vektorer av eksogene størrelser:

(11.1) Δp^{*} = relative prisendringer for eksogene prissektorer

(11.2) Δp_B^{*} = relative importprisendringer

(11.3) Δw^{*} = relative endringer i lønn pr. sysselsatt

(11.4) Δq^{*} = relative endringer i produksjon pr. sysselsatt

(11.5) Δp_R^{*} = relative endringer i eierinntekt pr. produsert enhet i overveltningssektorene

(11.6) Δp_H^{*} = relative endringer i satser for avgifter

(11.7) Δp_K^{*} = relative endringer i satser for subsidier

Prisrelasjonene er stilt opp i (4.8) - (4.13) i avsnitt 4. I (4.8) vil Δp_W^{*} bli erstattet av Δw^{*} og Δq^{*} fra (7.6). I den samme likningen vil Δp_D^{*} bli eliminert ved hjelp av (9.17). Δp_S^{*} og Δp_T^{*} blir erstattet av Δp_H^{*} og Δp_K^{*}. Verdiavgifter vil være med i oppstillingen nedenfor, og Δp_U^{*} og Δp_V^{*} vil bli skilt ut av Δp_B^{*} slik at sistnevnte vektor i det følgende vil ha dimensjon 137 mot tidligere 153 (og med tilsvarende omdefinering av Λ_B). Den inneholder nå foruten importprisendringer bare prisendringer for visse hjelpestørrelser (overføringskonti) som det ikke er hensiktsmessig å spesifisere med egne symboler, da de behandles helt analogt med importpriser.

I stedet for (4.8) får vi nå følgende likning:

$$\text{(P 1)} \quad \Delta p = \Big[\Delta p\Lambda + \Delta p_B^{*}\Lambda_B + \Delta p_U^{*}\Lambda_U + \Delta p_V^{*}\Lambda_V + \frac{\Delta w^{*} - \Delta q^{*}}{1_{142} + \Delta q^{*}}\Lambda_W + \Delta p_R^{*}\Lambda_R$$

$$+ \Delta p_J \theta_P \Lambda_D + \Delta p_H^{*}\Lambda_H + (1_3 + \Delta p_P^{*})\Lambda_P \hat{\Delta p} + \Delta p_K^{*}\Lambda_K\Big]\Gamma_s + \Delta p^{*}$$

I stedet for (4.11) og (4.12) får vi følgende likninger

$$\text{(P 2)} \quad \Delta p_E \Lambda_E = \Delta p - \Delta p\Lambda - \Delta p_B^{*}\Lambda_B - \Delta p_U^{*}\Lambda_U - \Delta p_V^{*}\Lambda_V$$

$$\text{(P 3)} \quad \Delta p_R \Lambda_R = \Delta p_E \Lambda_E - \frac{\Delta w^{*} - \Delta q^{*}}{1_{142} + \Delta q^{*}}\Lambda_W - \Delta p_J \theta_P \Lambda_D - \Delta p_H^{*}\Lambda_H - (1_3 + \Delta p_P^{*})\Lambda_P \hat{\Delta p} - \Delta p_K^{*}\Lambda_K$$

I (P 3) er Δp_J den eneste variabel som verken er eksogen eller bestemt ovenfor. Δp_J er en subvektor av Δp_Y, som bestemmes av (P.4) (tidligere (4.11).

(P 4) $\Delta p_Y = \Delta p \Lambda_Y + \Delta p_B^{*} \Lambda_B + \Delta p_U^{*} \Lambda_{UY} + (1_3 + \Delta p_P^{*}) \Lambda_{PY} \Delta \hat{p}_Y + \Delta p_V^{*} \Lambda_{VY}$

Prisendring for lagerendring bestemmes som tidligere ved (4.12) og (4.13).

(P 5) $\Delta p_L = \Delta p$

(P 6) $\Delta p_{L_B} = \Delta p_B^{*}$

Endelig bestemmes prisendringene for kapitalslit som i (9.17)

(P 7) $\Delta p_D = \Delta p_J \theta_P$

(P1) - (P 7) utgjør prisrelasjonene i modellen.

Konsumrelasjonene kan sammenfattes i følgende relasjoner, når det substitueres i (5.14) fra lønns- og skatterelasjonene i avsnitt 7 og 8. I stedet for (5.14) vil makrofunksjonen for samlet konsum nå være følgende:

(C 1) $\Delta C_{end} = \frac{1}{1+\Delta \bar{p}_c} \left((\alpha \Delta W_0^D + \beta \Delta R_0^D) - \Delta \bar{p}_c (\alpha W_0^D + \beta R_0^D) \right)$

der ΔW_0^D, ΔR_0^D, W_0^D og R_0^D betegner henholdsvis endring og nivå av disponibel lønns- og eierinntekt. For ΔW_0^D og ΔR_0^D anvendes følgende uttrykk.

(11.8) $\Delta W_0^D = \frac{\Delta w}{1+\Delta q} \Lambda_W (X + \Delta X)(1 - t_M) + 1_{142} \Lambda_W \Delta X (1 - t_G) - \frac{\Delta q}{1+\Delta q} \Lambda_W$

$(X + \Delta X)(1 - t_G) - \Delta Q_W^{*}$

(11.9) $\Delta R_0^D = \Delta p_R \Lambda_R (X + \Delta X) + 1_{142} \Lambda_R \Delta X - \Delta Q_R^{*}$

Det endogene konsumets fordeling på poster bestemmes som i (5.3), som på vektorform skrives

(C 2) $\Delta C = \mu \Delta C_{end} + h (\Delta p_c - \Delta \bar{p}_c \cdot 1_{47})^{transp.} \frac{1}{1 + \Delta \bar{p}_C}$

I kvantumsrelasjonene inngår følgende vektorer av eksogene variable.

(11.10) ΔX^{*} = eksogene produksjonsendringer

(11.11) ΔY^{*} = eksogene sluttleveringsendringer

(11.12) ΔL^{*} = eksogene lagerendring av innenlandske produkter

(11.13) ΔL_B^{*} = lagerendring av importerte produkter

Kvantumsrelasjonene (6.4) - (6.8) er stilt opp under forutsetning av at konsumet er eksogent (inngår i ΔY^{x}). I relasjonene nedenfor inngår bare det eksogene konsumet i ΔY^{x}, mens det endogene konsumet er med eksplisitt. Λ_C og Λ_{BC} er submatriser av Λ_Y og Λ_{BY} som bare inneholder konsumkoeffisientkolonnene.

(K 1) $\quad \Delta X^e = \Lambda \Delta X + \Lambda_Y \Delta Y^{x} + \Delta L^{x} + \Lambda_C \Delta C$

(K 2) $\quad \Delta X = \Gamma_e \Delta X^e + \Delta X^{x}$

(K 3) $\quad \Delta L = \Delta L^{x} - \psi_L (\Delta X^e - \Delta X)$

(K 4) $\quad \Delta B = \Lambda_B \Delta X + \Lambda_{BY} \Delta Y^{x} + \Delta L_B^{x} + \Lambda_{BC} \Delta C + \Psi_B (\Delta X^e - \Delta X)$

(K 5) $\quad \Delta E = \Lambda_E \Delta X + \Psi_E (\Delta X^e - \Delta X)$

(K 6) $\quad \Delta L_B = \Delta L_B^{x}$

Volumet av kapitalsit bestemmes som i (9.16). Vi forutsetter her endring for ett år framover.

(K 7) $\quad \Delta D = \Delta \tilde{D} + \theta_V d \Delta J$

der vi har skrevet

(11.14) $\Delta \tilde{D} = \theta_V d(J - D_J)$, jfr. (9.15) - (9.16).

Dette uttrykker endring i kapitalslit for kapitalen som eksisterte i basisåret.

De ytterligere relasjoner som fins i modellen, er lite annet enn definitoriske avledninger av de resultater man ønsker å presentere. De viktigste av disse er inntektsrelasjonene.

Endring i lønn (for hver sektor) er gitt ved følgende relasjon.

(I 1) $\quad \Delta W = \widehat{\frac{\Delta w - \Delta q}{1_{142} + \Delta q}} \Lambda_W (X + \Delta X) + \Lambda_W \Delta X$

Indirekte skatter og subsidier beregnes både etter art og etter sektor. For endring i indirekte skatter (ΔH) og subsidier (ΔK) fåes følgende relasjoner:

(I 2) $\quad \Delta H = \hat{\Delta p}_H \Lambda_H (X + \Delta X) + \Lambda_H \Delta X + \widehat{(1_3 + \Delta p_P)} \Lambda_P \hat{\Delta p} (X + \Delta X) + \hat{\Delta p}_U \Lambda_U (X + \Delta X) +$

$\Lambda_U \Delta X + \hat{\Delta p}_U \Lambda_{UY} (Y + \Delta Y) + \Lambda_{UY} \Delta Y + (1_3 + \Delta p_P) \Lambda_{UY} \hat{\Delta p}_Y (Y + \Delta Y)$

I (12) og (13) må leddene for varehandel og for prosentavgifter utvides med o-er for å få samme spesifikasjon som Δp_H og Δp_K.

(I 3) $\quad \Delta K = \hat{\Delta p}_K \Lambda_K (X + \Delta X) + \Lambda_K \Delta X + \hat{\Delta p}_V \Lambda_V (X + \Delta X) + \Lambda_V \Delta X + \hat{\Delta p}_V \Lambda_{VY} (Y + \Delta Y) + \Lambda_{VY} \Delta Y$

Eierinntekten bestemmes ikke analogt med lønn. Vektoren Δp_R, som ble løst i prisrelasjonene, framkom som den residuale komponent i bruttoproduktet. I denne løsningen ble kapitaslitets vekt i prisindekser for bruttoproduktet forutsatt å være den samme som i basisåret. Ved den måten vi har beregnet kapitalslitet på vil normalt kapitalslitandelen i bruttoproduktet endre seg. Denne endringen bevirker en motsatt endring i eierinntektsandelen. Vi får følgende relasjon

$$(\text{I } 4) \qquad \Delta R = (\hat{\Delta p}_R \Lambda_R + \hat{\Delta p}_D \Lambda_D)(X + \Delta X) + (\Lambda_R + \Lambda_D)\Delta X - \hat{\Delta p}_D\ (D + \Delta D) - \Delta D$$

12. Løsning av likningssystemet

Likningssystemet i MODIS III kan formuleres på andre, men likeverdige, måter enn i avsnitt 11. Utformingen av likningene der ligger nær opp til den løsningsmetoden som er anvendt. Karakteristisk for valg av løsningsmetode er for det første at det skal være mulig å beregne flere alternativer løsninger simultant, og for det andre at metoden skal være hensiktsmessig ved gjentatte beregninger. Begge disse hensyn er begrunnet i et kostnads- og effektivitets-synspunkt. Modellen er så stor i antall variable og relasjoner at beregnings-kostnadene er av anselig størrelse. Det er derfor av stor økonomisk betydning at systemet utformes slik at marginalkostnadene ved gjentatt bruk av modellen blir så lave som mulig. Men det er vel så viktig for modellens anvendelse at alle ledd i beregningsarbeidet kan gjennomføres raskt og effektivt.

Likningene i avsnitt 11 vil, med ett unntak, gjelde uendret dersom de variable forutsettes å foreligge i flere alternativer. For linjevektorene vil alternativene foreligge som flere linjer, og for kolonnevektorene som flere kolonner.

Det eneste unntaktet er diagonaliseringsoperasjonen, som forutsetter en endimensjonal operand. Likningene der diagonalisering forekommer, må altså skrives om, eller operasjonssymbolet må gis en ny tolking. (Matrisene med bare 1-tall må utvides til flere linjer).

Prislikningen (P 1) vil når Δp_J substitueres fra (P 4), utgjøre et lineært likningssystem av dimensjon 142. Det samme vil (K 1) når ΔC substitueres fra (C 2) og (C 1) og ΔX fra (K 2). Den relativt store dimensjonen av disse gjør det svært fordelaktig ved gjentatte løsninger å basere løsningen på invertering av koeffisientmatrisene. Dette er imidlertid ikke en helt like-fram framgangsmåte da begge koeffisientmatrisene inneholder eksogene variable eller endogene fra tidligere løsningstrinn. Dette er det samme som at liknings-systemene ikke er lineære i alle de variable, men bare i de ikke predeterminerte endogene variable. Koeffisientmatrisen i prissystemet inneholder de variable for endringer i satsene for prosentavgifter. Koeffisientmatrisen for kvantumssystemet inneholder, via konsumet, variable fra prisrelasjonene.

Prissystemet løses ved å substituere for Δp_J i (P 1) fra (P 4) og invertere koeffisientmatrisen som fås ved å se bort fra produktleddet $\Delta p_P \Lambda_P \hat{\Delta p}$ i (P 1). Derved får man den korrekte løsning hvis prosentavgiftssatsene ikke endres. Hvis endring av prosentsatsene forekommer, løses ved simpel iterasjon.

(12.1) $\Delta p_n = \Delta p_{eks} A + \Delta p_P \Lambda_P \hat{\Delta p}_{n-1} \quad n = 1,2,3,\ldots$

der Δp_{eks} er vektoren av alle de eksogene prisvariable og A er en matrise av redusert-form koeffisienter som er uavhengige av alle de variable. Denne iterasjonsformelen vil konvergere raskt selv for store avgiftsendringer.

De øvrige prislikningene løser ved enkel utmultipliseringer, når løsningen for Δp foreligger.

Kvantumssystemet løses ved å finne et eksplisitt uttrykk for konsummultiplikatoren og derved løse ΔC_{end} for ΔX. Dette vises nedenfor på en noe forenklet form.

(C 1') $\Delta C_{end} = F_1 \Delta X + F_2$

(C 2') $\Delta C = \mu \Delta C_{end}$

(K 1') $\Delta X^e = \Lambda \Delta X + \Lambda_Y \Delta Y^* + \Lambda_C \Delta C$

(K 2) $\Delta X = \Gamma_e \Delta X^e + \Delta X^*$

I (C 1') er F_1 og F_2 matriser som avhenger av prissystemets løsninger, men som er predeterminerte i dette systemet. Prisvridningseffektene er sløyfet i (C 2') da de er predeterminerte og kan tenkes tatt med i ΔY^*.

Av (K 1') og (K 2) fås

(12.2) $\Delta X^e = \Lambda \Gamma_e \Delta X^e + \Lambda \Delta X^* + \Lambda_Y \Delta Y^* + \Lambda_C \Delta C$

For gitt ΔC gir (12.2 følgende for ΔX^e

(12.3) $\Delta X^e = (I - \Lambda \Gamma_E)^{-1} (\Lambda \Delta X^* + \Lambda_Y \Delta Y^* + \Lambda_C \Delta C)$

Av (12.3) og (K 2) fås ΔX

(12.4) $\Delta X = \Gamma_e (I - \Lambda \Gamma_e)^{-1} (\Lambda \Delta X^* + \Lambda_Y \Delta Y^* + \Lambda_C \Delta C) + \Delta X^*$

Innsatt i (C 1') fås følgende likning for ΔC_{end}

(12.5) $$\Delta C_{end} = F_1 \Gamma_e (I - \Lambda\Gamma_e)^{-1} (\Lambda\Delta X^* + \Lambda_Y \Delta Y^* + \Lambda_C \mu \Delta C_{end}) + F_1 \Delta X^* + F_2$$

Løst med hensyn på ΔC_{end} fås av (12.5)

(12.6) $$C_{end} = \frac{1}{1 - F_1 \Gamma_e (I - \Lambda\Gamma_e)^{-1} \Lambda_C \mu} \left[F_1 \Gamma_e (I - \Lambda\Gamma_e)^{-1} (\Lambda\Delta X^* + \Lambda_Y \Delta Y^*) + F_1 \Delta X^* + F_2 \right]$$

Uttrykket foran hakeparantesen i (12.6) er konsummultiplikatoren. Den uttrykker den samlede konsumøking som følger av en utenfra generert konsumøking på en enhet.

Når ΔC_{end} er kjent, kan ΔX^e løses fra (K 1) ved at ΔX substitueres fra (K 2). ΔX^e løses ved invertering av en koeffisientmatrise. ΔX og de øvrige størrelser finnes, uten likningsløsning, av (K 2) - (K 7).

Parametrene som inngår i Γ- og ø-matrisene, inngår i koeffisientmatrisene. Endringer i disse koeffisientene medfører at systemet må løses på ny. I praksis vil man holde disse uendret i en serie beregninger der man altså, kan benytte de samme inverterte matriser.