Arbeidsnotater

STATISTISK SENTRALBYRÅ

IO 70/4 Oslo, 9. april 1970

EN MODELL FOR ANALYSE AV INNGÅELSE OG OPPLØSNING AV EKTESKAP I EN ÅPEN BEFOLKNING[x)]

Av

Tor Halvorsen

INNHOLD

x) Skrevet i Gruppen for Personmodeller.

1. INNLEDNING

Formålet med dette arbeidet er å utvikle og undersøke modeller for inngåelse og oppløsning av ekteskap med sikte på å bygge ut Byråets befolkningsprognosemodell med relasjoner for endringer i ekteskapelig status.

I et kvantitativt studium av inngåelse og oppløsning av ekteskap i en befolkning er det en stor fordel å kunne støtte seg til en matematisk formulert modell. Modellen som vi skal presentere i denne artikkelen er en ekteskapsmodell hvor bare ett kjønn betraktes eksplisitt i modellen, mens det andre kjønnet oppfattes som en slags skyggefaktor. Dersom vi hadde tatt begge kjønn eksplisitt med ville modellen fått en mer realistisk form, men den ville også blitt langt mer komplisert og stort sett uløselig (Hoem, 1968 a).

Vi skal benytte en tidskontinuerlig og aldersavhengig Markov-kjede som modell. Den enkelte tilstand svarer til en ekteskapsstatus.

Vi skal basere denne fremstillingen på å komme frem til størrelser som kan estimeres ved hjelp av data fra Det sentrale personregister i Statistisk Sentralbyrå (Personregisteret). For å forenkle fremstillingen vil vi i hele artikkelen anta at det ene kjønnet vi ser på er kvinner og videre vil vi definere "norske kvinner" som alle kvinner som er bosatt eller har vært bosatt i Norge.

Fremstillingen er bygget opp slik som antydet i fig.1.1. De heltrukne pilene viser til den direkte fortsettelse av kapitlene, mens de stiplede pilene viser til tillegg og kommentarer. Disse siste kan overspringes av lesere som bare ønsker å få med hovedtrekkene i den teoretiske fremstillingen.

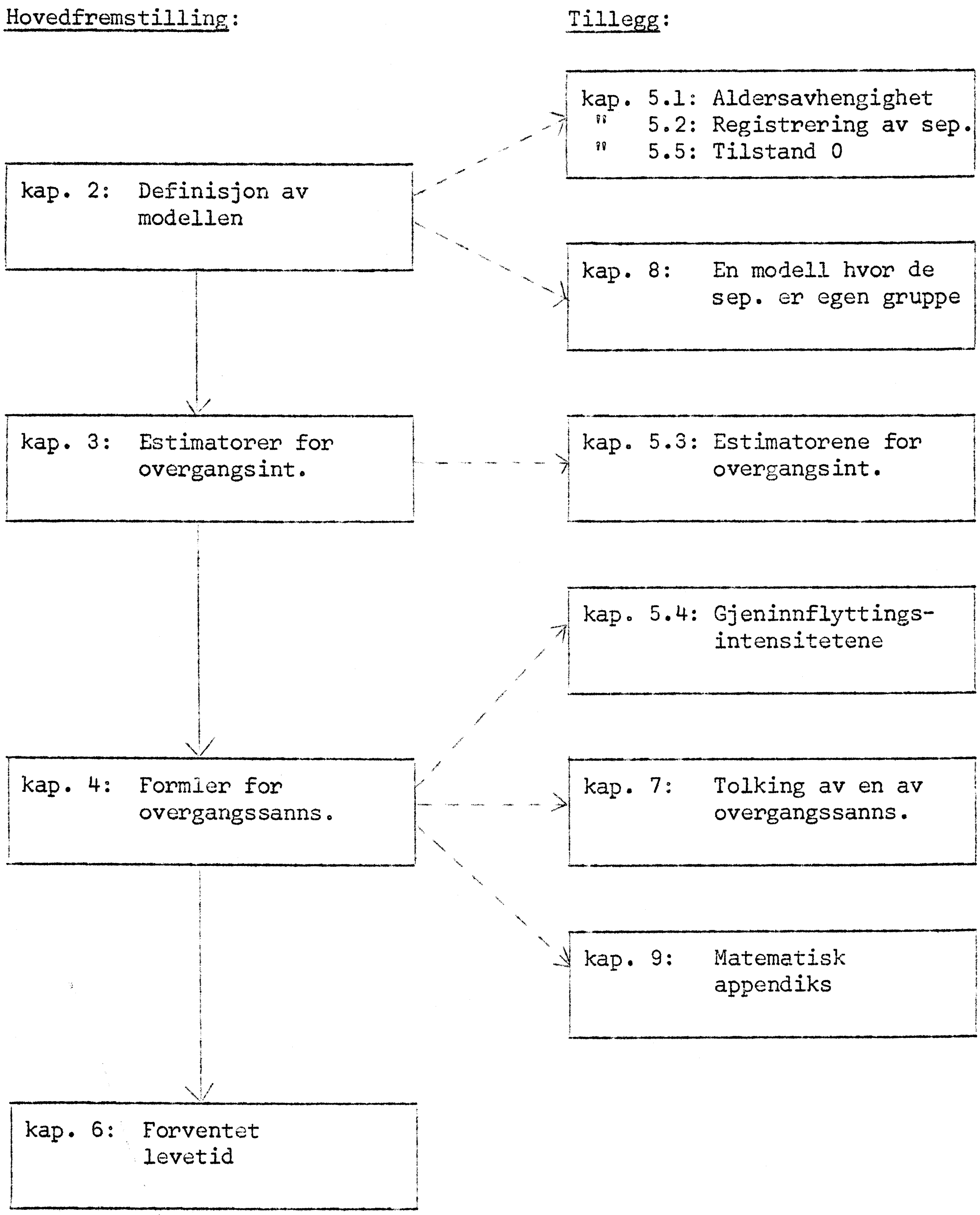
Hovedfremstilling:
Tillegg:
kap. 5.1: Aldersavhengighet
" 5.2: Registrering av sep.
" 5.5: Tilstand 0
kap. 2: Definisjon av modellen
kap. 8: En modell hvor de sep. er egen gruppe
kap. 3: Estimatorer for overgangsint.
kap. 5.3: Estimatorene for overgangsint.
kap. 5.4: Gjeninnflyttings-intensitetene
kap. 4: Formler for overgangssanns.
kap. 7: Tolking av en av overgangssanns.
kap. 9: Matematisk appendiks
kap. 6: Forventet levetid

Fig. 1.1

2. MODELLBESKRIVELSE

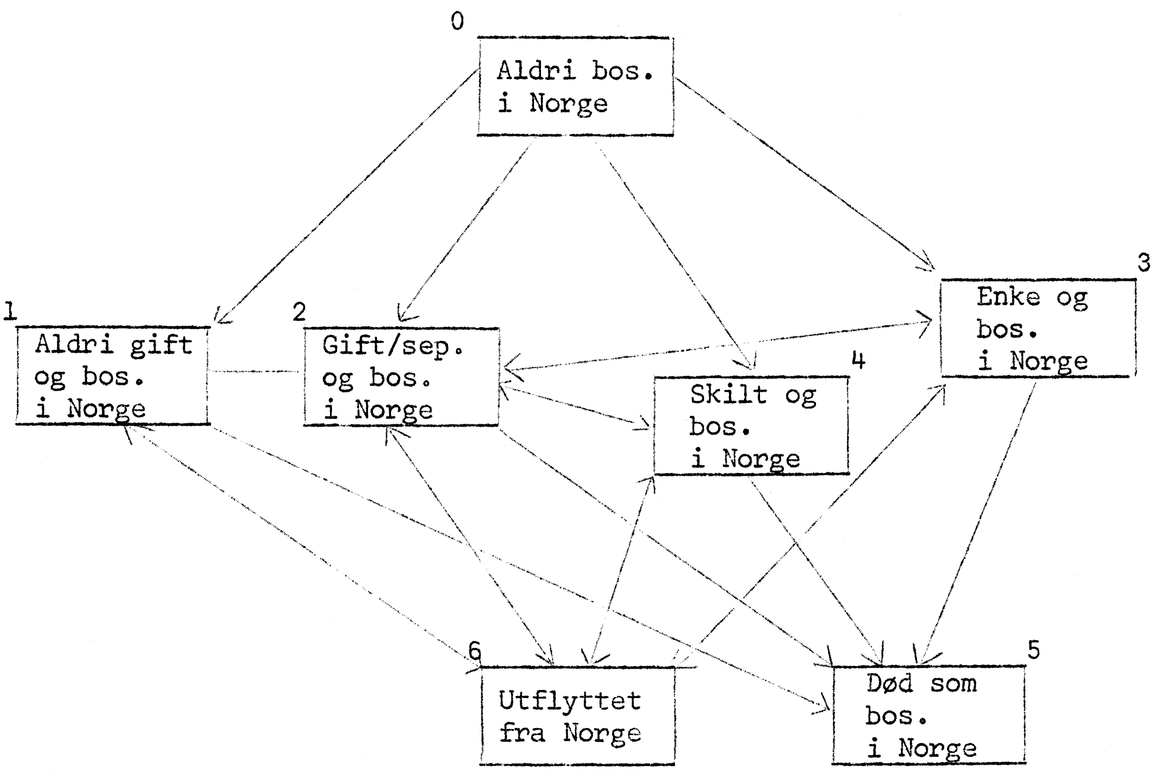

Fig. 2.1

La oss klassifisere jordens kvinnelige befolkning ved hjelp av bosted og ekteskapelig status.

Kvinner som aldri har vært bosatt i Norge sier vi er i tilstand 0. Kvinner som er bosatt i Norge er i en av tilstandene 1-5 avhengig av hvilken ekteskapelig status de har:

Tilstand 1: Kvinner som aldri har vært gift
" 2: Gifte og separerte kvinner
" 3: Enker
" 4: Skilte kvinner
" 5: Døde kvinner

Norske kvinner som for tiden er bosatt i utlandet sier vi er i tilstand 6.

Slik som vi nå har definert tilstandene i modellen er det naturlig at de forskjellige overgangene fra en tilstand til en annen kun kan skje der hvor det er piler i figur 2.1. og da kun i pilenes retning.

La oss nå innføre symbolet S (x) = tilstanden en kvinne er i i alder x. Dermed kan overgangssannsynlighetene defineres slik

$$P_{ij}(x,t) = P_r\{S(x+t) = j \mid S(x) = i\}$$

Altså sannsynligheten for å være i tilstand j i alder x+t gitt at en er i tilstand i i alder x. Videre definerer vi <u>overgangsintensitetene</u> som:

$$\mu_{ij}(X) = \lim_{t \downarrow 0} \frac{P_{ij}(x,t)}{t} \quad \text{når } i \neq j \tag{2.2}$$

og vi forutsetter at alle $\mu_{ij}(x)$-ene er kontinuerlige.

La oss sette inn Δx istedenfor t i (2.2) og skrive formelen på følgende måte

$$P_{ij}(x,\Delta x) = \mu_{ij}(x)\Delta x + \sigma(\Delta x)$$

hvor

$$\lim_{\Delta x \to 0} \sigma(\Delta x) = 0$$

Dermed ser vi at vi kan gi overgangsintensitetsfunksjonen følgende tolkning: $\mu_{ij}(x)\Delta x$ er for små Δx tilnærmet lik sannsynligheten for at en person som er i tilstand i i alder x skal være i tilstand j i alder $x + \Delta x$.

Av definisjonene på tilstandene i modellen (fig. 2.1) ser vi at $\mu_{12}(x)$ blir giftemålsintensiteten for en x-årig kvinne som aldri har vært gift. $\mu_{32}(x)$ og $\mu_{42}(x)$ er giftemålsintensitetene for en x-årig kvinne som er h.h.v. enke eller skilt. $\mu_{23}(x)$ og $\mu_{24}(x)$ er h.h.v. enke-intensiteten og skilsmisse-intensiteten for en x-årig gift eller separert kvinne. $\mu_{i5}(x)$, $\mu_{i6}(x)$ og $\mu_{6i}(x)$ for i = 1, 2, 3 og 4 er h.h.v. døds-, utflyttings- og gjeninnflyttings-intensiteten for norske kvinner i alder x i de respektive ekteskapelige statuser.

I modellen som vi betrakter her (fig. 2.1) kan i og j som inngår i (2.2) ha verdiene 0 til 6. Vår a priori kjennskap til overgangsintensitetene er da

$$\mu_{ij}(x) \underset{x}{\equiv} 0 \quad \text{for} \quad \begin{array}{lll} (j = 0 & , & i = 1, 2, \ldots, 6 \\ (j = 1 & , & i = 2, 3, 4, 5 \\ (j = 2 & , & i = 5 \\ (j = 3 & , & i = 1, 4, 5 \\ (j = 4 & , & i = 1, 3, 5 \\ (j = 5,6 & , & i = 0 \end{array} \tag{2.3}$$

La oss for å forenkle skrivingen siden innføre rent definisjonsmessig

$$\mu_{ii}(x) \underset{x}{\equiv} 0 \tag{2.4}$$

<u>Avgangsintensitetene</u> fra de forskjellige tilstandene definerer vi som

$$\mu_i(x) = \lim_{t \downarrow 0} \frac{1 - P_{ii}(x,t)}{t} \tag{2.5}$$

Tilsvarende (2.2) kan vi skrive (2.5) på formen

$$1 - P_{ii}(x, \Delta x) = \mu_i(x)\,\Delta x + \sigma(\Delta x)$$

Dermed ser vi at vi kan gi avgangsintensitetsfunksjonene følgende tolkning:

$\mu_i(x)\,\Delta x$ er for små Δx tilnærmet lik sannsynligheten for i alder $x + \Delta x$ ikke å være i tilstand i når en er i tilstand i i alder x.

Siden $\sum_j P_{ij}(x, t) = 1$ så ser vi av (2.2) og (2.5) når vi benytter oss av (2.4) at

$$\mu_i(x) = \sum_k \mu_{ik}(x) \tag{2.6}$$

Av (2.6) ser vi at $\mu_i(x)$-ene også er kontinuerlige siden $\mu_{ij}(x)$-ene er det. Av (2.3) og (2.4) fremgår at i vår modell er $\mu_5(x) \underset{x}{\equiv} 0$ hvilket viser at modellen er realistisk på dette punkt (folk oppstår jo ikke fra de døde). Slike tilstander som f.eks. tilstand 5 skal vi betegne som absorberende. Alle andre tilstander (hvor $\mu_i(x) \underset{x}{\not\equiv} 0$) er transiente.

Innfører vi nå

$${}_tp_i(x) = P_r\{\text{lever bos. i Norge i alder } x+t \mid S(x) = i\}$$

$${}_tq_i(x) = P_r\{\text{død bos. i Norge innen alder } x+t \mid S(x) = i\}$$

får vi

$${}_tp_i(x) = \sum_{j=1}^{4} P_{ij}(x, t)$$

$${}_tq_i(x) = P_{i5}(x, t)$$

3. ESTIMATORER FOR OVERGANGSINTENSITETENE

La oss innføre betegnelsene

$N_{ij}(a)$ = antall kvinner som i løpet av observasjonsperioden går over fra tilstand i til tilstand j i en alder x der $a \le x < a+1$ og a er heltallig.

$L_i(a)$ = samlet gjennomlevet tid i løpet av observasjonsperioden i tilstand i i alderne x der $a \le x < a+1$

Dersom vi nå forutsetter at overgangsintensitetene er konstante over hvert aldersår kan det vises (Hoem, 1968 c) at de sentrale overgangskvoter

$$c_{ij}(a) = \frac{N_{ij}(a)}{L_i(a)} \quad \text{for } i \neq j \tag{3.1}$$

er sannsynlighetsmaksimeringsestimatorer for $\mu_{ij}(x)$ når $x \in [a, a+1]$. Det kan også vises (Hoem, 1968 c) at når det ikke er noen tilgang i den bestanden som observeres (se kapittel 5.4) så er $C_{ij}(a)$-ene optimalt Fisher konsistente.

Legg merke til at $C_{ij}(a)$ har de ovenfor nevnte egenskaper selv om noen av $\mu_{kl}(x)$ for enten $k \neq i$ og/eller $l \neq j$ er a priori kjent (Sverdrup, 1967, kap. II 4. B og C spesielt side 60).

4. NOEN FORMLER FOR OVERGANGSSANNSYNLIGHETENE

Da modellen i kapittel 2 er et lukket system av tilstander gjelder formelen (Chapman - Kolmogorovs ligning).

$$(4.1)\quad P_{ij}(x,\ t+s) = \sum_k P_{ik}(x,\ t)\ P_{kj}(x+t,\ s)$$

for vilkårlige ikke negative s og t. Av (4.1) kan vi ved hjelp av (2.2) og (2.5) utlede (Feller, 1957) den såkalte forlengsligningen

$$(4.2)\quad \frac{\partial}{\partial t} P_{ij}(x,t) = -P_{ij}(x,t)\ \mu_j(x+t) + \sum_k P_{ik}(x,t)\ \mu_{kj}(x+t)$$

Av forlengsligningen kan det vises at

$$(4.3)\quad P_{ij}(x,t) \underset{x,t}{\equiv} 0$$

for de i og j hvor $\mu_{kj}(x) \underset{x}{\equiv} 0$ for alle tilstander k som kan nås fra i.

De sannsynlighetene $P_{ij}(x,t)$ vi kommer fram til ved å løse forlengsligningen (4.2) ved hjelp av (2.3) og (4.3) vil vi kalle de <u>influerte overgangssannsynlighetene</u> da de kan være influert av alle mulige overgangsintensiteter i modellen.

For å finne de influerte overgangssannsynlighetene fra tilstandene 1-4 vil vi imidlertid stå overfor problemet å løse et system av 4-grads differensialligninger og det blir nokså komplisert.

La oss derfor innføre de <u>semiinfluerte overgangssannsynlighetene</u> $P^u_{ij}(x,t)$ hvor u betegner en mengde av intensiteter. $P^u_{ij}(x,t)$ er det uttrykket vi får når vi setter alle de overgangsintensitetene i $P_{ij}(x,t)$ som inngår i u lik 0.

Det er klart at dersom de overgangsintensitetene som inngår i mengden u i de influerte overgangssannsynlighetene er tilnærmet lik 0 så vil også de semi-influerte overgangssannsynligheter være tilnærmet lik de influerte. Altså

$$P^u_{ij}\ (x,t) \approx P_{ij}\ (x,t)$$

når $\mu_{kl}(x) \approx 0$ for alle $\mu_{kl}(x) \in u$.

Ut fra denne tankegang skal vi nå innskrenke oss til å finne $P^{u_1}_{ij}(x,t)$ for $u_1 = \{\mu_{6j}(x)$ for $j = 1,\ldots, 4\}$. Vi har nemlig stor tro på at gjeninnflyttings-intensiteten for norske kvinner som har flyttet utenlands er meget nær 0. Altså

$\mu_{6j}(x) \simeq 0$ for alle x og j = 1,..., 4 og dermed blir

$$P_{ij}^{u_1}(x,t) \approx P_{ij}(x,t)$$

Ved å sette

(4.4) $\mu_{6j}(x) = 0$ for j = 1,..., 4 i forlengsligningen (4.2) så få vi en differensialligning i $P_{ij}^{u_1}(x,t)$ og av den finner vi

$$P_{11}^{u_1}(x,t) = \exp\{-\int_0^t \mu_1(x+\tau)\,d\tau\}$$

$$P_{ij}^{u_1}(x,t) = \sum_{k=2}^{4}\int_0^t P_{ik}^{u_1}(x,\tau)\,\mu_{kj}(x+\tau)\,d\tau$$

for i = 2, 3 og 4 og j = 5 og 6

$$P_{1j}^{u_1}(x,t) = \int_0^t P_{11}^{u_1}(x,\tau)\,\mu_{12}(x+\tau)\,P_{2j}^{u_1}(x+\tau,\,t-\tau)\,d\tau$$

for j = 2, 3 og 4

$$P_{1j}^{u_1}(x,t) = \int_0^t P_{11}^{u_1}(x,\tau)\,\mu_{1j}(x+\tau)\,d\tau + \int_0^t P_{11}^{u_1}(x,\tau)\,\mu_{12}(x+\tau)\cdot$$

$$P_{2j}^{u_1}(x+\tau,\,t-\tau)\,d\tau$$

for j = 5 og 6

Vi er bare interessert i de overgangssannsynligheter som angår overgang fra en tilstand i Norge (tilstandene 1, 2, 3 eller 4) til en hvilken som helst annen tilstand. Alle disse overgangssannsynlighetene ser vi av formlene ovenfor kan finnes i prinsippet dersom vi kjenner $P_{ij}^{u_1}(x,t)$ for i, j = 2, 3 og 4. Disse ni overgangssannsynlighetene spiller altså en sentral rolle i modellen og vi skal derfor konsentrere oss om dem.

Av forlengsligningen (4.2) får vi når vi setter inn (2.3), (4.3) og (4.4) følgende ni differensialligninger til å bestemme $P_{ij}^{u_2}(x,t)$ for i, j = 2, 3 og 4:

$$\frac{\partial}{\partial t}P_{i2}^{u_1}(x,t) = -P_{i2}^{u_1}(x,t)\cdot\mu_2(x+t) + P_{i3}^{u_1}(x,t)\,\mu_{32}(x+t) +$$

$$P_{i4}^{u_1}(x,t)\,\mu_{42}(x+t)$$

(4.5)

$$\frac{\partial}{\partial t}P_{ij}^{u_1}(x,t) = -P_{ij}^{u_1}(x,t)\,\mu_j(x+t) + P_{i2}^{u_1}(x,t)\,\mu_{2j}(x+t)$$

for i = 2, 3, 4 og j = 3, 4

Dermed ser vi og at overgangsintensitetene $\mu_{oi}(x)$ for i = 1,2,3 og 4 ikke inngår i noen av de overgangssannsynlighetene vi er interessert i. Det er altså ikke nødvendig å estimere dem (noe som heller ikke er mulig med de opplysninger vi kan få fra Personregisteret).

Det er ikke mulig av (4.5) å finne noe generelt eksplisitt uttrykk for $P_{ij}^{u_1}(x,t)$ for i, j = 2, 3, 4, men vi er hovedsakelig interessert i de estimerte overgangssannsynlighetene. Dem finner vi ved å sette (3.1) inn i de respektive uttrykkene for $P_{ij}^{u_1}(x,t)$. Dersom vi betegner de estimerte overgangssannsynlighetene med $\hat{P}_{ij}^{u_1}(x,t)$ så får vi ved å sette inn $c_{ij}(a)$ i(4.5)

$$\frac{\partial}{\partial t}\hat{P}_{i2}^{u_1}(x,t) = -\hat{P}_{i2}^{u_1}(x,t)\cdot c_2(a)+\hat{P}_{i3}^{u_1}(x,t)\cdot c_{32}(a)+\hat{P}_{i4}^{u_1}(x,t)\cdot c_{42}(a)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\hat{P}_{ij}^{u_1}(x,t) = -\hat{P}_{ij}^{u_1}(x,t)\cdot c_j(a)+\hat{P}_{i2}^{u_1}(x,t)\cdot c_{2j}(a)$$

hvor $c_i(a) = \sum_{j\neq i} c_{ij}(a)$ for i = 2,3,4, j = 3,4 og x, x+t $\in [a, a+1\rangle$

Av disse ligningene kan vi løse $\hat{P}_{ij}^{u_1}(x,t)$ for i, j = 2, 3, 4 eksplisitt og hvorledes det gjøres skal vi vise i kap. 9.

La oss spesielt kalle de $P_{ij}^{u}(x,t)$ hvor u = { alle $\mu_{kl}(x)$ hvor k $\neq$ i og l $\neq$ j } for de <u>partielle overgangssannsynlighetene</u> og la oss for letthets skyld betegne disse med $P_{ij}^{p}(x,t)$. Disse overgangssannsynlighetene er altså bare influert av overgangsintensiteter fra tilstand i til tilstand j. Generelt vil vi ha at

$$P_{ij}^{p}(x,t) = \exp\ \{-\int_0^t \mu_{ij}(x+\tau)\,d\tau\}$$

I modellen i kapittel 2 er de partielle overgangssannsynlighetene meget kunstige. Relativt til denne modellen er de jo ikke sannsynligheter i vanlig forstand heller. Men som et mål for avgangen fra tilstand i til tilstand j vil $P_{ij}^{p}(x,t)$ være å foretrekke fremfor både $P_{ij}^{u}(x,t)$ og $P_{ij}(x,t)$ (forutsatt at $P_{ij}^{p}(x,t) \neq P_{ij}^{u}(x,t)$ og $P_{ij}(x,t)$). Størrelsen av $P_{ij}^{u}(x,t)$ og $P_{ij}(x,t)$ er jo influert av andre overgangsårsaker enn årsaken til overgang direkte fra tilstand i til tilstand j. Imidlertid vil $\mu_{ij}(x)$ være et like godt mål som $P_{ij}^{p}(x,t)$.

Det kan i mange modeller være helt naturlig å operere med de semi-influerte overgangssannsynlighetene da disse i mange tilfeller kan tolkes som en vanlig sannsynlighet. Eksempel på dette skal vi gi i kapittel 7.

5. KOMMENTARER TIL MODELLBESKRIVELSEN OG ESTIMERINGEN

5.1 Aldersavhengigheten

Ved et studium av inngåelse og oppløsning av ekteskap er vi allerede på forhånd klar over at ikke alle overgangsintensitetene bare avhenger av alderen. Ser vi f.eks. på skilsmisseintensiteten så er det meget som taler for at den også er avhengig av slike faktorer som alder ved giftermål, varighet av ekteskap, antall (hjemmeværende) barn i ekteskapet, minste barns alder og sosial status. Det er også god grunn til å tro at kvinnenes overgangsintensiteter til enhver tid er avhengig av mennenes fordeling på de forskjellige ekteskapelige statuser (Hoem, 1968 a). Derfor er det meget som taler for at vi i denne modellen skulle ha benyttet selekte intensiteter (intensiteter som ikke bare er avhengig av faktisk alder (se for øvrig (Hoem, 1968 b))). Men for i denne omgang å gjøre modellen relativt enkel skal vi innskrenke oss til bare å benytte aggregate intensiteter (intensiteter som bare avhenger av kvinnenes alder).

5.2 Registrering av separerte

Ved estimeringen skal vi, som før nevnt, benytte opplysninger fra Personregisteret. Personregisteret ble opprettet 1/10 1964 og var selvfølgelig ikke helt fullkommet fra starten av. Dette gjør at det blir litt vanskelig å anvende registeret den første tiden. Noe av det som volder ekstra vanskeligheter i denne forbindelse er at personer som var skilte eller separerte pr. 1/10 1964 ble registrert i samme gruppe. Etter 1/10 1964 er imidlertid de separerte blitt registrert i en egen gruppe. Dermed består tilgangen etter 1/10 1964 i gruppen som ved opprettelsen av registeret inneholdt både skilte og separerte personer, bare av skilte personer. Når vi her snakker om "separerte personer" så mener vi personer som er separert med bevilling. Siden separasjonstiden ved bevilling her i Norge maksimalt behøver å være 2 år før skilsmisse innvilges, er det meget stor sannsynlighet for at de som var separert pr. 1/10 1964 har en annen ekteskapelig status etter 1/10 1966. Ved å starte vår observasjonsperiode etter denne dato, kan vi regne med at gruppen med skilte er helt fri for separerte personer. Begynner vi imidlertid observasjonsperioden før 1/10 1966 er det sannsynligvis flere og flere separerte i gruppen dess nærmere vi kommer 1/10 1964.

Fra en viss dato av er imidlertid ikke Personregisteret blitt ajourført med separasjonsmeldingene. Dermed kan vi ikke på det nåværende tidspunkt skille gifte og separerte. Denne ajourføringen er det imidlertid meningen skal bli utført om ikke så altfor lang tid. Men selv om denne ajourføringen hadde vært utført så ville ikke saken vært særlig enklere. Her i Norge kan man nemlig være separert uten bevilling også. Dvs. at dersom ektefellene kan dokumentere at de har bodd fra hverandre (vært separert uten bevilling) de siste 3 årene, er det tilstrekkelig til å få innvilget skilsmisse. Disse personene gir altså ikke beskjed om at de er separert før etter 3 år. Det er følgelig ikke mulig å få registrert dem som separerte. Derfor ville det ikke under noen omstendighet være mulig å skille alle separerte fra de gifte. Dette er da grunnen til at vi har valgt å ha de gifte og separerte i samme gruppe i modellen.

5.3 Estimatorene for overgangsintensitetene

I kapittel 3 forutsatte vi at overgangsintensitetene var konstante over hvert aldersår.

For nyfødte er det klart at dette ikke er oppfylt i virkeligheten. Siden vi skal studere ekteskapet og på forhånd vet at det bare er kvinner over en viss alder (f.eks. 15 år) som gifter seg, skal vi i vår analyse se bort fra de første aldersgruppene.

Noe som er verre er imidlertid at det er all grunn til å tro at overgangsintensitetene vil variere sterkt med alderen for de høyeste aldre. (Dette vet vi med sikkerhet er tilfelle med dødsintensiteten.) Her vil vi sannsynligvis også ha så få observasjoner at enhver estimator vil få en meget stor varians og en forbedring av estimatorene blir derfor vanskelig. Vi blir derfor nødt til å begrense oss til å se på kvinner under f.eks. 80 år. Ser vi denne undersøkelsen f.eks. som et ledd i en fruktbarhetsundersøkelse, da er det klart at hva som skjer med kvinner over 80 år er av liten interesse.

Vi skal derfor innskrenke vår undersøkelse til kvinner i aldersgruppen 15-80 år. For å få spesifisert sannsynlighetsfordelingen for inntredelsestidspunktet i denne bestanden for de kvinner som ved observasjonsperiodens begynnelse ikke er med i bestanden, men som i løpet av observasjonsperioden kommer med, skal vi imidlertid som observasjonsbestand velge de kvinner som ved observasjonens begynnelse (tidspunkt 0) er med i aldersgruppen $[\omega_1, \omega_2]$ hvor $\omega_1 = 15-T$ og $\omega_2 = 80$. T er her lengden på observasjonsperioden.

5.4 Gjeninnflyttingsintensitetene

Vi innskrenket oss i kapittel 4 til å finne uttrykk for de semi-influerte overgangssannsynlighetene $P_{ij}^{u_1}(x,t)$ ut fra den antagelse at

$$\mu_{6j}(x) \approx 0 \quad \text{for } j = 1,\ldots, 4$$

og derfor

$$P_{ij}(x,t) \approx P_{ij}^{u_1}(x,t) \quad \text{for alle } i, j.$$

En annen grunn til at vi faktisk er nødt til å innskrenke oss til å finne $P_{ij}^{u_1}(x,t)$ er at vi ved hjelp av Personregisteret ikke har mulighet for å observere total gjennomlevet tid i utlandet ($L_6(a)$ for alle a) for de norske kvinnene. Disse størrelsene ($L_6(a)$-ene) kunne nok kanskje vært beregnet ved en tilnærmelse. Sammen med oppgaver over antall gjeninnflyttinger (altså $N_{6j}(a)$-ene hvor j=1,...,4) ville vi da ha funnet tilnærmelser til de estimatorene for $\mu_{6j}(x)$-ene som vi presenterte i kapittel 3. Vi vil imidlertid i denne artikkelen anta at tilnærmelsen

$$c_{6j}(a) = \frac{N_{6j}(a)}{L_6(a)} \approx 0 \quad \text{for alle a og j er like god.}$$

For å få estimatene for de andre overgangsintensitetene riktige, skal vi selv om vi har gjort antagelsen ovenfor, behandle gjeninnflytterne fra det tidspunkt de kommer til Norge. Vi behandler da gjeninnflytterne på like linje med de som flytter til Norge for første gang (som om de kom fra tilstand 0).

5.5 Tilstand 0

Som bestand benytter vi teoretisk sett hele jordens kvinnelige befolkning. Men p.g.a. at vi bare er interessert i overgangssannsynlighetene fra tilstander i Norge (se kapittel 4) viser det seg at vi kun trenger å estimere $\mu_{ij}(x)$ for i,j = 1,=,...,6. Siden $\mu_{0j}(x)$ for j = 1,=,...,6 aldri skal estimeres, er det bare teoretiske årsaker til at vi har tatt med tilstanden 0 og vi kan trygt la bestanden omfatte kvinner i denne tilstanden. På denne måten er alle kvinner som i løpet av observasjonsperioden kan komme i en eller flere av tilstandene 1-4 i aldersgruppen $[\omega_1, \omega_2]$ med i modellen på "tidspunktet 0". Videre har den bestanden vi betrakter ingen tilgang i løpet av observasjonsperioden. Det kan da vises, som vi nevnte i kapittel 3, at estimatorene for $\mu_{ij}(x)$ er optimalt Fisher konsistente (Hoem, 1968 c).

Den egentlige årsaken til at vi har tatt med tilstand 0 er at vi på den måten får spesifisert sannsynlighetsfordelingen for en kvinnes inntredelsestidspunkt i modellen som består av tilstandene 1-6 (fig. 5.5.1). Den sannsynlighetsfordelingen vi kan utlede blir en betinget fordeling gitt gjennom

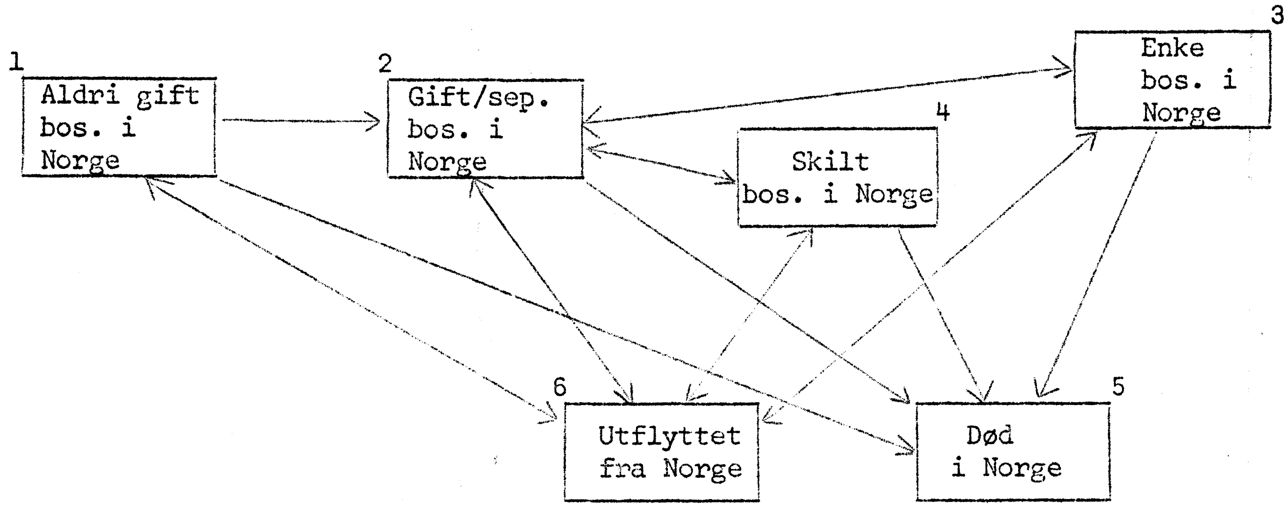

fig. 5.5.1

hvilken tilstand j (= 1,2,3 eller 4) kvinnen inntrer i modellen i løpet av observasjonsperioden. La oss betegne denne sannsynligheten for inntredelse i intervallet (t, t+dt) for én kvinne i alder x på tidspunkt 0 for $f_j(x,t)dt$. Da er

$$f_j\,(x,t)\;dt = \frac{P_{00}(x,t)\;\mu_{0j}(x+t)\;dt}{\int_0^T P_{00}(x,\tau)\mu_{0j}(x+\tau)d\tau} = \frac{\mu_{0j}(x+t)\;\exp\{\,-\int_0^t \mu_0(x+\tau)\;d\tau\}}{\int_0^T \mu_{0j}(x+\tau)\;\exp\{\,-\int_0^\tau \mu_0(x+\xi)d\xi\}d\tau}\;dt$$

Denne metoden til å bestemme sannsynlighetsfordelingen til inntredelsestidspunktet vil kunne benyttes i de fleste modeller av tilsvarende type som den vi betrakter. Her får vi imidlertid ikke at alle inntredelsestidspunktene er identisk fordelte (Sverdrup, 1967, kapittel II). Men når vi har gitt tilstanden på tidspunkt 0 (starten av observasjonsperioden) og vi dessuten for de som er i tilstand 0 på tidspunkt 0 har gitt hvilken av tilstandene 1-4 de senere i perioden inntrer i så får vi i dette tilfellet 5 sett identisk fordelte inntredelsestidspunkter (4 sett for de som er i tilstand 0 på tidspunkt 0 og et sett for de som er i tilstandene 1-4 på tidspunkt 0). Dette er vel et mer realistisk resultat enn det som benyttes i Sverdrup, 1967, kapittel II hvor det er antatt at alle inntredelsestidspunkter er identisk fordelte. Vi kan imidlertid benytte samme framgangsmåte som i Sverdrup, 1967 til å finne sannsynlighetsfordelingene til overgangskvotene.

6. FORVENTET LEVETID

La oss innføre definisjonen:

For $i \neq j$ er $\bar{e}_{ij}(x)$ forventet varighet av første opphold i tilstand j etter alder x, når en i alder x er i tilstand i. $\bar{e}_{ii}(x)$ er forventet gjenstående varighet av det aktuelle opphold i tilstand i for en x-åring.

Videre innfører vi

$$P_i(x,t) = P_r\{S(x+\tau) = i \text{ for alle } \tau\varepsilon[0,t] \mid S(x) = i\}$$

altså sannsynligheten for å være i tilstand i i hele perioden fra alder x til alder x+t gitt at en er i tilstand i i alder x.

Vi ser da lett at

$$P_i(x,t) = \exp\{-\int_0^t \mu_i(x+\tau)\,d\tau\}$$

og dermed får vi

$$(6.1) \qquad \bar{e}_{ii}(x) = \int_0^{\omega-x} t \cdot P_i(x,t) \cdot \mu_i(x+t)\,dt = \int_0^{\omega-x} P_i(x,t)\,dt$$

I vår modell (kap. 2) gjelder følgende relasjoner når vi antar (4.4) gjelder (ingen gjeninnvandring)

$$\bar{e}_{12}(x) = \int_0^{\omega-x} P_{11}^{u_1}(x,t)\,\mu_{12}(x+t)\,\bar{e}_{22}(x+t)\,dt$$

La oss også innføre:

$\overset{0}{e}_{ij}(x)$ er den forventede totale gjenstående levetid i tilstand j etter alder x når det er gitt at en er i tilstand i i alder x.

Det kan da vises at

$$\overset{0}{e}_{ij}(x) = \int_0^{\omega-x} P_{ij}(x,t)\,dt$$

7. TOLKINGEN AV EN AV OVERGANGSSANNSYNLIGHETENE I MODELLEN

La oss nå se på en modell av typen vist i fig. 7.1.

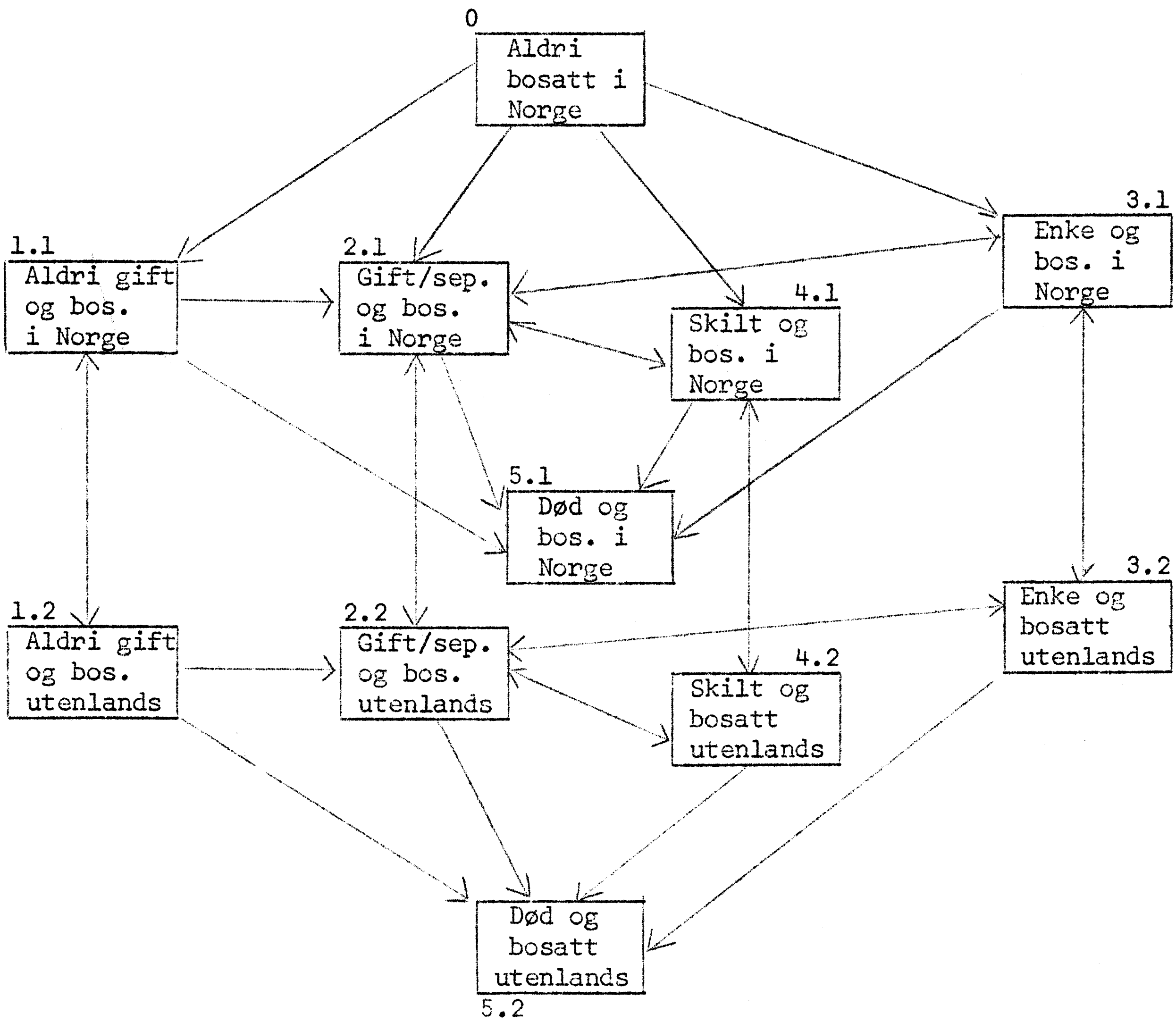

fig. 7.1

Her har tilstandene 0, (1.1), (2.1), (3.1), (4.1) og (5.1) samme definisjon som h.h.v. tilstandene 0,1,2,3,4 og 5 i kapittel 2. Tilstandene (1.2), (2.2), (3.2), (4.2) og (5.2) er en oppdeling av tilstand 6 i kapittel 2. Dette er en oppdeling m.h.p. ekteskapelig status av de norske kvinnene som bor utenlands. Denne oppdelingen tilsvarer nøyaktig den oppdelingen vi foretok i kapittel 2 av de som bor innenlands. La $\mu_{(i.\alpha)(j.\beta)}(x)$ betegne overgangsintensiteten fra tilstand (i.α) til tilstand (j.β). Vi ser da at $\mu_{(i.1)(j.1)}(x)$ og $\mu_{(i.1)(i.2)}(x)$ tilsvarer nøyaktig h.h.v. $\mu_{ij}(x)$ for i,j = 1,2,...,5 og $\mu_{i6}(x)$ for i = 1,2,3,4 i kapittel 2.

Den eneste forskjellen mellom denne modellen og den vi presenterte i kapittel 2 er at vi i denne modellen skiller de utflyttede kvinnene m.h.p. ekteskapelig status, mens vi i modellen i kapittel 2 hadde alle de utflyttede i en gruppe.

Rent teoretisk sett vil dette være en bedre modell enn den vi presenterte i kapittel 2 for i motsetning til før får vi nå

$$P_{(i.1)(1.1)}(x,t) \underset{x,t}{\equiv} 0 \quad \text{for } i = 2,3 \text{ og } 4$$

Altså er sannsynligheten for å komme fra en tilstand "før gift" i Norge til tilstanden "aldri gift" i Norge identisk lik 0 for alle x og t. Mens modellen i kapittel 2 kan gi som resultat (dersom det skjer gjeninnflytting av "aldri gifte"; dvs. $\mu_{61}(x) > 0$ for noen x)

$$P_{i1}(x,t) > 0 \quad \text{for } i = 2,3 \text{ eller } 4.$$

Den samme sannsynligheten kan altså der være større enn 0. I virkeligheten skal det jo være umulig å komme fra "før gift" til "aldri gift".

Dersom vår antagelse i kapittel 4 om at det ikke skjer gjeninnflytting (4.4) er riktig så er ikke innvendingen ovenfor relevant for da vil $P_{i1}(x,t)$ i modellen i kapittel 2 alltid være lik 0.

La oss nå i denne modellen (fig. 7.1) forutsette at

$$(7.2) \qquad \mu_{(i.1)(j.1)}(x) \underset{x}{\equiv} \mu_{(i.2)(j.2)}(x) \quad \text{for } i.j = 1.2.3.4 \text{ og } 5$$

Altså at overgangsintensitetene mellom de forskjellige ekteskapelige statuser for de norske kvinnene i utlandet er identisk like de tilsvarende overgangsintensitetene for kvinnene i Norge. Dermed kan alle overgangsintensitetene estimeres ved hjelp av data for kvinner i Norge (vi ser fremdeles bort fra tilstand 0 da denne bare har rent teoretisk interesse).

Av (7.2) får vi da

$$(7.3) \qquad \mu_{(i.\alpha)(j.\alpha)}(x) \underset{x}{\equiv} \mu_{ij}(x) \quad \text{for } \alpha = 1,2$$

hvor $\mu_{ij}(x)$ er definert i kapittel 2. Vi har og at

$$\mu_{(i.1)}(x) \underset{x}{\equiv} \mu_i(x) \quad \text{for } i = 1,\ldots,4$$

Vi innfører nå de 5 ekteskapsstatier

1: Aldri gift (bosatt i eller utenfor Norge)
2: Gift eller separert (bosatt i eller utenfor Norge)
3: Enke (" " " " ")
4: Skilt (" " " " ")
5: Død (" " " " ")

og lar E(x) betegne ekteskapelig status til en norsk kvinne i alder x. Dersom $E(x) = j$ for en kvinne så betyr det at kvinnen i alder x enten er i tilstand (j.1) eller i tilstand (j.2). Videre lar vi $F_{(i.\alpha)j}(x,t)$ betegne sannsynligheten for at en norsk kvinne skal ha ekteskapelig status j i alder x+t gitt at hun i alder x var i tilstand (i.α). Altså

$$F_{(i.\alpha)j}(x,t) = P_r\{E\ (x+t) = j \mid S\ (x) = (i.\alpha)\}$$

for α = 1,2 og alle i og j

Vi ser da at

$$F_{(i.\alpha)j}(x,t) = P_{(i.\alpha)(j.1)}(x,t) + P_{(i.\alpha)(j.2)}(x,t)$$

for α = 1,2 og alle i og j

La oss innføre

$$\mu_j^{*}\ (x) = \sum_i \mu_{(j.\alpha)(i.\alpha)}(x) = \mu_j(x) - \mu_{j6}(x)$$

for α = 1,2 og alle j

Forlengsligningen for modellen i dette kapitlet er

$$\frac{\delta}{\delta t} P_{(i.\alpha)(j.\beta)}(x,t) = -P_{(i.\alpha)(j.\beta)}(x,t)\mu_{(j.\beta)}(x,t) + \sum_{k\neq j} P_{(i.\alpha)(k.\beta)}(x,t)\cdot$$

$$\mu_{(k.\beta)(j.\beta)}(x+t) + P_{(i.\alpha)(j.\gamma)}(x,t)\mu_{(j.\gamma)(j.\beta)}(x+t)$$

for i,j = 1,2,...,5, α,β,γ = 1,2 og γ ≠ β

La oss summere de to differensialligningene vi får når vi velger h.h.v. β=1 og β=2. Hvis vi deretter anvender (7.3), (7.4) og (7.5) får vi:

$$\frac{\delta}{\delta t} F_{(i.\alpha)j}(x,t) = -F_{(i.\alpha)j}(x,t)\mu_j^{*}\ (x+t) + \sum_{k\neq j} F_{(i.\alpha)k}(x,t)\mu_{kj}(x+t)$$

for α = 1,2 og alle i og j

Altså nettopp differensialligningen for $P_{ij}^{u_2}\ (x,t)$ hvor $u_2 = \{\mu_{j6}(x)$ for $j=1,2,3,4\}$ i modellen i kapittel 2. At $\mu_{j6}(x)$ settes lik 0 vil medføre at $\mu_{6j}(x)$ ikke kommer med i formlene for $P_{ij}^{u_2}(x,t)$ da $P_{i6}^{u_2}(x,t)$ blir lik 0. Derfor blir $P_{ij}^{u_2}(x,t)$ lik uttrykket vi får når vi setter $\mu_{j6}(x+\tau) = 0$ for $\tau \varepsilon (0,t)$ i uttrykkene for $P_{ij}^{u_1}(x,t)$ i kapittel 4. Det tilsvarende er bevist generelt i Hoem, 1968 d, side 6. Der er det imidlertid forutsatt at $\mu_{(i.2)(i.1)}(x) \underset{x}{\equiv} 0$ som vi nå ser er en unødvendig forutsetning.

Dersom forutsetningen (7.2) er riktig, får vi altså at sannsynligheten $F_{(i.\alpha)j}(x,t)$ er lik sannsynligheten $P_{ij}^{u_2}\ (x,t)$. $P_{ij}^{u_2}\ (x,t)$ kan estimeres ved hjelp av opplysninger om kvinnene som er bosatt i Norge da estimatoren $\hat{P}_{ij}^{u_2}\ (x,t)$

blir lik $\hat{P}_{ij}^{u_1}(x,t)$ innsatt $c_{j6}(a) = 0$. Dermed kan vi når (7.2) gjelder, estimere $F_{(i.\alpha)j}(x,t)$ som er en sannsynlighet for den lukkede bestanden norske kvinner, ved opplysninger om kvinnene bare i den tiden de bor i Norge.

La oss nå innføre

$$G_{ij}(x,t) = P_r\{E(x+t) = j \mid E(x) = i\}$$

altså sannsynligheten for at en norsk kvinne skal være i ekteskapelig status j i alder x+t gitt at hun er i ekteskapelig status i i alder x.

Dersom vi nå også innfører

$$H_{(i.\alpha)}(x) = P_r\{S(x) = (i.\alpha) \mid E(x) = i\}$$

altså sannsynligheten for å være i tilstand (i.α) i alder x gitt at en er i ekteskapelig status i i alder x.

Da er

$$H_{(i.1)}(x) + H_{(i.2)}(x) \underset{i}{\equiv} 1 \qquad \text{for } x > 0$$

Dermed får vi

$$\begin{aligned} G_{ij}(x,t) &= H_{(i.1)}(x)\, F_{(i.1)j}(x,t) + H_{(i.2)}(x)\, F_{(i.2)j}(x,t) \\ &= H_{(i.1)}(x)\, P_{ij}^{u_2}(x,t) + H_{(i.2)}(x)\, P_{ij}^{u_2}(x,t) \\ &= P_{ij}^{u_2}(x,t) \end{aligned}$$

Vi ser dermed at også sannsynligheten $G_{ij}(x,t)$ for den lukkede befolkningen norske kvinner under forutsetning (7.2) kan estimeres ved hjelp av opplysninger om kvinnene bare i den tiden de bor i Norge.

Under forutsetning (7.2) har vi altså funnet at

$$(7.6) \qquad F_{(i.\alpha)j}(x,t) \underset{x,t}{\equiv} G_{ij}(x,t) \underset{x,t}{\equiv} P_{ij}^{u_2}(x,t) \qquad \text{for } \alpha = 1,2$$

Den semiinfluerte sannsynligheten $P_{ij}^{u_2}(x,t)$ i modellen i kapittel 2 kan altså tolkes som sannsynligheten for at en norsk kvinne skal ha ekteskapelig status j i alder x+t gitt at hun har ekteskapelig status i alder x (og evt. i tillegg gitt at hun enten er bosatt i Norge eller utenlands).

Det er ikke alltid at vi bare er interessert i å studere overgangssannsynlighetene i en geografisk avgrenset befolkning (f.eks. personer bosatt i Norge). Vi er kanskje enkelte ganger interessert i å studere en befolkning bestående av personer som er eller har vært bosatt i et geografisk område (f.eks. norske kvinner). Det vil som regel by på meget store vanskeligheter å få inn data om personene mens de bor utenfor det geografiske området. Under visse forutsetninger kan imidlertid dette problem løses. Et eksempel på dette er resultatet i (7.6) som er utledet under forutsetning (7.2).

8. EN MODELL HVOR DE SEPARERTE ER EN EGEN GRUPPE

Det er naturlig å tro at de som er separert oppfører seg forskjellig fra de som er gift.

En modell som tar vare på de separerte kunne da være slik som antydet i fig. 8.1.

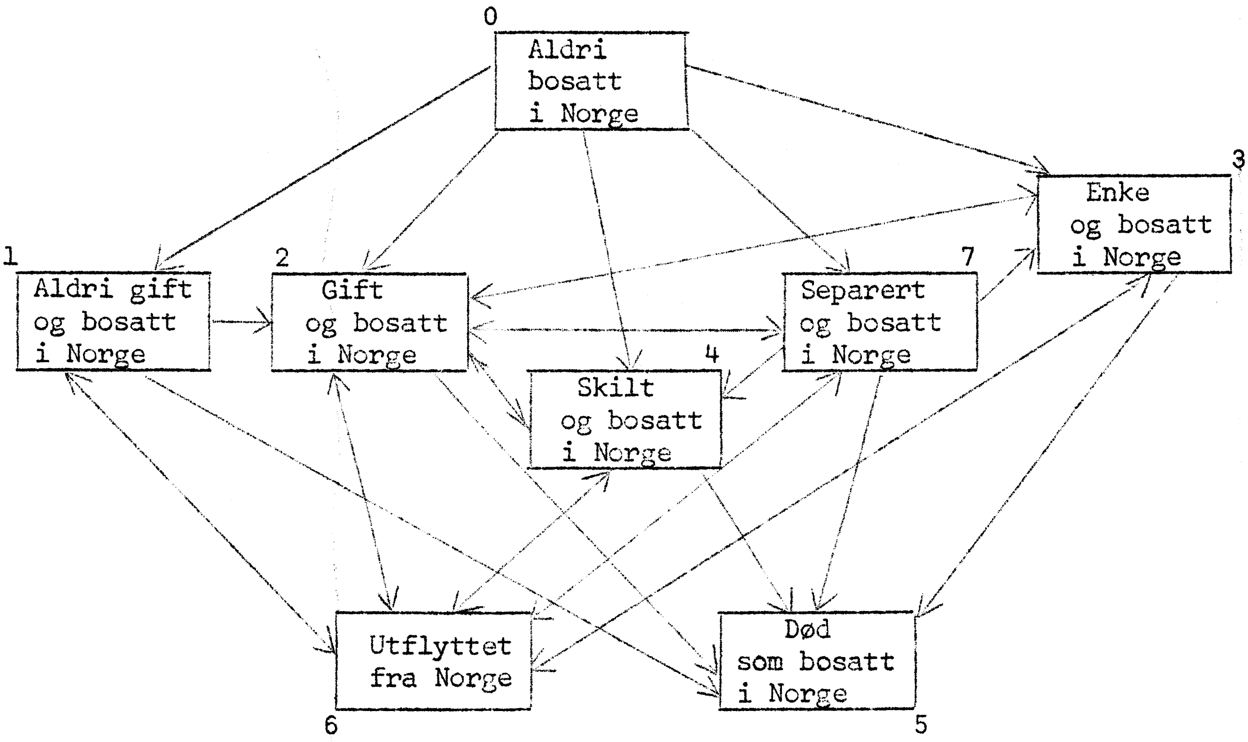

fig. 8.1

Her har vi tenkt at tilstandene 0,1,3,4,5 og 6 har samme definisjon som i kapittel 2. Tilstand 2 har vi tenkt skal bare bestå av gifte og tilstand 7 av alle separerte. Da vi i Norge ikke får registrert de som er separert uten bevilling (jfr. kapittel 5.5) vil vi dersom vi skal benytte observasjoner av norske kvinner til å estimere størrelser i modellen, måtte legge en noe annen definisjon til grunn for tilstand 2 og 7. Tilstand 2 må vi da la bestå av gifte og separerte uten bevilling, mens tilstand 7 må bestå av alle som er separert med bevilling. At denne modellen er mer "realistisk" enn den vi presenterte i kapittel 2 er klart, men hvor meget bedre den er er avhengig av hvor stor del av de separerte som er separert med bevilling.

La oss anta at overgangsintensitetene er representert ved konstanter. Da vil problemet med å finne de influerte overgangssannsynlighetene i denne modellen uttrykt med overgangsintensitetene bestå i å løse et system av 5.-grads differensialligninger. Innskrenker vi oss imidlertid til å finne de semiinfluerte overgangssannsynlighetene $P_{ij}^{u_1'}(x,t)$ hvor u_1' = {gjeninnvandrings-intensitetene} (altså av samme type som de vi fant i kapittel 4), står vi overfor problemet å løse et system av 4.-grads differensialligninger. Estimatene til disse vil generelt kunne finnes ved samme framgangsmåte som i kapittel 9. Bare med den forskjellen at vi i dette tilfellet til slutt vil stå overfor problemet å løse en fjerdegradsligning og det er jo som regel komplisert nok.

Numeriske løsninger av alle overgangssannsynlighetene vil imidlertid kunne finnes ved hjelp av andre teknikker enn den vi har vært inne på her.

9. MATEMATISK APPENDIKS

Vi skal løse differensialligningene

(9.1) $\frac{\partial}{\partial t}\hat{P}_{i2}^{u_1}(x,t) = -\hat{P}_{i2}^{u_1}(x,t)\cdot c_2(a) + P_{i3}^{u_1}(x,t)\ c_{32}\ (a) + P_{i4}^{u_1}(x,t)\ c_{42}\ (a)$

(9.2) $\frac{\partial}{\partial t}\hat{P}_{ij}^{u_1}(x,t) = -\hat{P}_{ij}^{u_1}(x,t)\ c_j(a) + \hat{P}_{i2}(x,t)\ c_{2j}(a)$

for $i = 2$, 3 og 4 og $j = 3$ og 4

La oss nå for å lette skrivingen innføre

$y_{ij}(t)$ istedenfor $\hat{P}_{ij}^{u_1}(x,t)$

c_{ij} " $c_{ij}(a)$

c_i " $c_i(a)$

Dermed går (9.1) og (9.2) over på formen

(9.1b) $y_{i2}'(t) = -\ y_{i2}(t)\cdot c_2 + y_{i3}(t)\ c_{32} + y_{i4}(t)\cdot c_{42}$

(9.2b) $y_{ij}'(t) = -\ y_{ij}(t)\cdot c_j + y_{i2}(t)\cdot c_{2j}$

Av (9.1b) får vi

(9.3) $y_{i3}(t)\ c_{32} = y_{i2}^1(t) + y_{i2}(t)\ c_2 - y_{i4}(t)\ c_{42}$

Deriverer vi nå (9.1b) og setter inn uttrykkene for $y'_{ij}(t)$, $j = 3, 4$ fra (9.2b) får vi

$$y''_{i2}(t) = - y'_{i2}(t)\, c_2 + y_{i2}(t) \cdot \{c_{32} \cdot c_{23} + c_{24} \cdot c_{42}\}$$
$$- y_{i3}(t)\, c_{32} \cdot c_3 - y_{i4}(t)\, c_{42} \cdot c_4$$

Setter vi så inn (9.3) får vi

(9.4) $$y''_{i2}(t) = - y'_{i2}(t)\, \{c_2 + c_3\} + y_{i2}(t)\, \{c_{42}\, c_{24} + c_{32}\, c_{23} - c_2 \cdot c_3\}$$
$$+ y_{i4}(t)\, c_{42}\, \{c_3 - c_4\}$$

Av (9.4) finner vi

(9.5) $$y_{i4}(t) \cdot c_{42}\{c_3 - c_4\} = y''_{i2}(t) + y'_{i2}(t)\, \{c_2 + c_3\}$$
$$- y_{i2}(t)\, \{c_{42} \cdot c_{24} + c_{32} \cdot c_{23} - c_2 \cdot c_3\}$$

Vi deriverer (9.4) og setter inn (9.2b) med $j = 4$ og setter til slutt inn (9.5) og får da

(9.6) $$y'''_{i2}(t) + \alpha \cdot y''_{i2}(t) + \beta \cdot y'_{i2}(t) + \gamma\, y_{i2}(t) = 0$$

hvor

$$\alpha = c_2 + c_3 + c_4$$
$$\beta = -c_{32} \cdot c_{23} - c_{42} \cdot c_{24} + c_2 \cdot c_3 + c_2 \cdot c_4 + c_3 \cdot c_4$$
$$\gamma = -c_3 \cdot c_{24} \cdot c_{42} - c_4 \cdot c_{32} \cdot c_{23} + c_2 \cdot c_3 \cdot c_4$$

Dette er en 3.-grad homogen differensialligning med konstante koeffisienter og den generelle løsning av denne finner vi ved først å løse den karakteristiske ligning

$$r^3 + \alpha \cdot r^2 + \beta \cdot r + \gamma = 0$$

Innfører vi nå

$$q = \frac{1}{3}\beta - \frac{1}{9}\alpha^2 \quad \text{og} \quad p = \frac{1}{6}(\beta \cdot \alpha - 3 \cdot \gamma) - \frac{1}{27}\alpha^3$$

og

$$s_1 = \left[p + (q^3 + p^2)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{3}}$$
$$s_2 = \left[p - (q^3 + p^2)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{3}}$$

da er røttene i den karakteristiske ligningen

$$r_1 = (s_1 + s_2) - \frac{\alpha}{3}$$
$$r_2 = - \frac{1}{2}(s_1 + s_2) - \frac{\alpha}{3} + \frac{i\sqrt{3}}{2}(s_1 - s_2)$$
$$r_3 = - \frac{1}{2}(s_1 + s_2) - \frac{\alpha}{3} - \frac{i\sqrt{3}}{2}(s_1 - s_2)$$

Om disse røttene vet vi at når

(9.7a) $q^3 + p^2 > 0$ er r_1 reell og r_2 og r_3 kompleks konjugerte, når

(9.7b) $q^3 + p^2 = 0$ er alle reelle og minst r_2 og r_3 like og når

(9.7c) $q^3 + p^2 < 0$ er alle reelle.

Når vi kjenner r_1, r_2 og r_3 kan vi finne et sett lineært uavhengige løsninger, u_1, u_2 og u_3, av(9.6.) Forbindelsen mellom u-ene og r-ene i det tilfellet at alle r-ene er forskjellige (dette vil alltid være tilfelle under(9.7a) og sikkert også som oftest, iallfall i praksis, under(9.7c))er:

$$u_1 = e^{r_1 \cdot t}$$
$$u_2 = e^{r_2 \cdot t} \qquad (9.8)$$
$$u_3 = e^{r_3 \cdot t}$$

Den generelle løsning av (9.6) blir da

$$y_{i2}(t) = \hat{P}_{i\,2}(x,t) = A^1_{i2} \cdot u_1 + A^2_{i2} \cdot u_2 + A^3_{i2} \cdot u_3$$

A_{i2}-ene bestemmes så ved kjente initialbetingelser på $P_{i2}(x,t)$. Disse initialbetingelsene er:

$$P_{i2}(x,0) = \begin{cases} 1 & \text{for } i = 2 \\ 0 & \text{for } i = 3,4 \end{cases} \qquad (9.9)$$

(9.1) sammen med (9.9) gir

$$\frac{\partial}{\partial t} P_{i2}(x,t)\Big|_{t=0} = \begin{cases} -c_2 & \text{for } i = 2 \\ c_{i2} & \text{for } i = 3 \text{ og } 4 \end{cases} \qquad (9.10)$$

(9.4) sammen med (9.9) og (9.10) gir

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} P_{i2}(x,t)\Big|_{t=0} = \begin{cases} c_2^2 + c_{23}\, c_{32} + c_{24}\, c_{42} & \text{for } i = 2 \\ -\, c_{i2}(c_2 + c_i) & \text{for } i = 3 \text{ og } 4 \end{cases} \qquad (9.11)$$

Dermed kan vi forholdsvis enkelt finne A_{i2}-ene for de forskjellige sett av u-er. I tilfelle vi har (9.8) får vi

$$A^3_{i2} = \frac{1}{(r_3 - r_1)(r_3 - r_2)} \{ [c_2^2 + c_{23}\, c_{32} + c_{24}\, c_{42} + c_2(r_1 + r_2) + r_1\, r_2]\, \delta_{i2} - b_i \}$$

$$A^2_{i2} = \frac{1}{r_2 - r_1} \{ -[c_2 + r_1]\, \delta_{i2} + c_{i2} - A^2_{i2}\, (r_3 - r_1) \}$$

$$A^1_{i2} = \delta_{i2} - A^2_{i2} - A^3_{i2}$$

hvor

$$b_i = c_{i2} \cdot (c_2 + c_i + r_2 + r_1)$$

$$\delta_{i2} = \begin{cases} 1 & \text{når } i = 2 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

Dermed kan vi si at vi har fått bestemt $\hat{P}_{i2}(x,t)$. Av (9.5) kan vi så finne $\hat{P}_{i4}(x,t)$ og når det er gjort kan vi finne $\hat{P}_{i3}(x,t)$ av (9.3). Dermed har vi løst differensialligningene (9.1) og (9.2).

10. REFERANSER

(1) Feller, William (1957): "An Introduction to Probability Theory and Its Application. Volume I. Second Edition". John Wiley & Sons, Inc.

(2) Hoem, Jan M. (1968a): "Concepts of a Bisexual Theory of Marriage Formation", side 7-13 i "Four Demographic Papers". Arbeidsnotat IO 68/18 fra Statistisk Sentralbyrå. Kommer i Statistisk Tidskrift, Stockholm, 1969.

(3) Hoem, Jan M. (1968 b): "A Probabilistic Approach to Nuptiality", side 14-30 i "Four Demographic Papers". Arbeidsnotat IO 68/18 fra Statistisk Sentralbyrå.

(4) Hoem, Jan M. (1968 c): "Time-Continuous Markov Chain Estimation Techniques in Demographic Models", side 31-50 i "Four Demographic Papers". Arbeidsnotat IO 68/18 fra Statistisk Sentralbyrå.

(5) Hoem, Jan M. (1968 d): "Purged and Partial Markov Chains". Memorandum datert 19. mai 1969. Sosialøkonomisk Institutt, Universitetet i Oslo. Kommer i Skand. Aktuarietidskrift.

(6) Sverdrup, Erling (1967): "Statistiske metoder ved dødelighets-undersøkelser". 2. utgave. Matematisk institutt, avd. c, Universitetet i Oslo.