

Arbeidsnotater

S T A T I S T I S K S E N T R A L B Y R Å

Dronningensgt. 16, Oslo-Dep., Oslo 1. Tlf. 41 38 20, 41 36 60

IO 73/7

15. februar 1973

OM IDENTIFIKASJON AV ØKONOMETRISKE MODELLER

Av Arne Amundsen

Innhold

	Side
1. Innledning	1
2. Identifikasjonsproblemets karakter	2
3. Økonometriske modeller; begreper og terminologi	13
4. Relasjonssystem, strukturform og redusert form	17
5. Den reduserte form; identifikasjonsegenskaper	28
6. Identifikasjon av strukturrelasjoner: Et eksempel med tre relasjoner	40
7. Identifikasjon av lineære strukturrelasjoner generelt; innføring av matriseform	63
8. Tolkinger av identifikasjonskriteriene; transformasjoner; koeffisientlikhetsrestriksjoner	77

Dette heftet behandler et generelt metodespørsmål med tilknytningspunkter til mange analyseområder innenfor Statistisk Sentralbyrås arbeidsfelt og er beregnet for intern kurs- og opplæringsvirksomhet. Et opplag er etter avtale stilt til disposisjon for Sosialøkonomisk institutt ved Universitetet i Oslo.

Ikke for offentliggjøring. Dette notat er et arbeidsdokument og kan siteres eller refereres bare etter spesiell tillatelse i hvert enkelt tilfelle. Synspunkter og konklusjoner kan ikke uten videre tas som uttrykk for Statistisk Sentralbyrås oppfatning.

MERKNADER FRA FORFATTEREN

Økonometri er et anvendt fag som krever innsikt på flere fagområder. Teoretisk økonomi og teoretisk statistikk er viktige deler av grunnlaget for å utvikle og spesifisere økonomiske modeller; erfaring og innsikt i anvendt statistikk er minst like viktig.

Ingen samlet framstilling dekker hele dette feltet. En innføring i faget forutsetter et visst nivå av forkunnskaper i teoretisk økonomi, i teoretisk og anvendt statistikk og i de grener av matematikken som disse fagområdene gjør bruk av. For videregående studier finnes det i dag mange lærebøker som gir utmerket dekning av de matematisk-statistiske emner som har tilknytning til økonometrien, men her er kravene til matematiske forkunnskaper - eller til parallell lesning av matematisk litteratur - vesentlig skjerpet. Økonomiske emner utenom de matematisk-statistiske behandles ikke med den samme grundighet, men dekkes i noen grad ved eksempler og ved henvisninger til publiserte arbeider og annen spesiallitteratur.

Det emne som behandles i dette heftet, tillegges stor vekt både i elementære innføringer og i videregående økonomisk litteratur. Det er lett å gi illustrasjoner av hvor galt det kan gå dersom en prøver ved hjelp av markedsdata å finne ut av hvorledes f.eks. etterspørselen etter en vare avhenger av varens pris i tilfeller da også tilbudet av varen varierer med denne prisen; den samvariasjonen da eventuelt måtte finne mellom kvantum og pris vil være bestemt av tilfeldige variasjoner i tilbud og etterspørsel og gir ingen informasjon verken om etterspørselens eller tilbudets variasjon med prisen. Etterspørselsrelasjonen er i dette tilfelle ikke i d e n t i f i - s e r b a r ved hjelp av slike markedsdata. Men det er ikke så lett å gjennomføre en generalisering til kriterier for identifikasjon anvendt på større og mer interessante relasjonssystemer. Da kreves det et vesentlig

større matematisk begrepsapparat.

Erfaringer fra en del års veiledning av sosialøkonomer i økonometrisk metodelære har gitt meg det inntrykk at innføring av identifikasjonsbegrepet ved helt enkle geometriske eksempler gir god forståelse av hva begrepet står for, men at det matematiske nivå som brukes når problemet behandles mer generelt, skaper problemer. Det synes derfor å være behov for en supplerende framstilling der det særlig legges vekt på å utvikle kriterier for identifikasjon av de vanligste typer av økonometriske modeller basert på et noe mer beskjedent krav til matematiske kunnskaper enn det som har fått hevd i spesiallitteraturen og i de mer avanserte lærebøker.

Heftet er lagt opp med sikte på å dekke et slikt behov. Jeg har ikke funnet det nødvendig å gjengi de vanlige helt enkle geometriske og algebraiske eksempler; til gjengjeld gir jeg en noe fyldigere behandling av identifikasjonsproblemets alminnelige karakter enn det vanligvis gis.

De fire første avsnittene gir en innføring i emnet og forklarer begreper og terminologi. I avsnitt 5 behandles identifikasjon av parametrene i den såkalte reduserte form av en økonometrisk modell; dette er et viktig ledd i utledningen av identifikasjonskriterier for modellens strukturparametre. I avsnitt 6 utvikles disse kriteriene med utgangspunkt i en noe forenklet modell og ved hjelp av vanlig algebra. Behandlingen skulle være generell nok til å klarlegge alle vesentlige punkter i utviklingen av kriterier for lineære modeller. Generaliseringen i avsnitt 7 gir lite prinsipielt nytt, men gir overgangen til en behandling ved hjelp av matrisealgebra, som nå er vanlig i lærebøker. I avsnitt 8 er det særlig lagt vekt på å få fram de tolkinger som kriteriene kan gis, og å behandle forholdsvis generelt betydningen av at restriksjoner er pålagt noen av strukturparametrene på forhånd. Framstillingen i de to siste avsnittene tar dels sikte på å gi utfyllende kommentarer til punkter som er svært kompakt og knapt behandlet i de lærebøkene som brukes i

undervisningen i økonometri for sosialøkonomiske studenter ved Universitetet i Oslo. Denne undervisning støtter seg for tiden på:

E. Malinvaud, Statistical Methods of Econometrics, Amsterdam 1966
(eller andre utgaver), og

J. Johnston, Econometric Methods, London og New York 1963.

Jeg har ikke funnet grunn til å gi utførlige henvisninger til litteraturen på feltet. Jeg viser til de nevnte lærebøker. Nevnes må imidlertid F. M. Fisher, The Identification Problem in Econometrics, New York 1966, som jeg særlig har støttet meg på i de tre siste avsnitt. En spesiell grunn har jeg til å nevne de tidlige arbeider av Trygve Haavelmo, som har vært grunnleggende på feltet, og som er å finne i alle referanselister. Mange års stimulerende samarbeid med professor Haavelmo ved undervisningen i økonometri for sosialøkonomiske studenter har skjerpet min interesse for faget, og har gitt meg lyst til å gå i gang med et arbeid som jeg håper kan være en begynnelse til en samlet framstilling om metoder i økonometrisk analyse.

Jeg takker alle som på forskjellig måte har hjulpet meg til å gjennomføre dette arbeidet. Spesielt takker jeg Erik Biørn, Olav Bjerkholt og Per Sevaldsen for en fyldig liste med forslag til rettelser og klarere formuleringer. Så langt det har vært mulig uten en vesentlig omredigering av stoffet er disse forslagene innarbeidet i det endelige manuskript. De sikkert mange feil og uklarheter som gjenstår, vil jeg sette pris på å bli gjort oppmerksom på.

Oslo, 15. februar 1973

Arne Amundsen

1. Innledning.

Økonometriske modeller må være i samsvar med den datasituasjon som foreligger. Sjelden eller aldri gir denne adgang til eksperimentelle data. Tilknytningen til ikke-eksperimentelle data krever spesielle overveielser i hvert enkelt tilfelle, men reiser også et mer generelt og fundamentalt spørsmål om kriterier for når det er mulig, og når det ikke er mulig, å tallfeste en teori på grunnlag av observasjoner.

Slike kriterier er utviklet for økonometriske modeller som danner et system av simultane lineære likninger med stokastiske restledd. Under nærmere spesifiserte forutsetninger kan det formuleres presise kriterier som må være oppfylt for at det skal være mulig å bestemme (eller teste) noen eller alle parametrene på grunnlag av observasjoner som forutsettes å være generert av modellen. Vi sier at parametrene er *i d e n t i f i s e r b a r e* (eller at de lar seg identifisere, - at identifikasjon av dem er mulig), når disse egenskapene foreligger.

De undersøkelser som må foretas for å bringe klarhet i identifikasjonsspørsmålet, bygger på den økonomisk-teoretiske forutsetning at den økonometriske modell omfatter alle relasjoner av strukturell

art som har hatt innflytelse på de observasjoner som skal brukes til å kvantifisere modellrelasjonene. Hvis denne forutsetningen er oppfylt, blir det et logisk problem om det lar seg gjøre å trekke slutninger "den omvendte vei", dvs. å trekke kvantitative slutninger om ukjente teoriparametre ut fra de data som teorien har "produsert".

Utleddningen av kriterier for identifikasjon av parametrene i lineære økonometriske modeller er i stor utstrekning basert på setninger fra den lineære algebra. Men lineære modeller er et nokså spesielt tilfelle. Vi skal derfor innledningsvis gi plass for noen mer generelle synspunkter.

2. Identifikasjonsproblemets karakter.

Mulighetene for å kvantifisere en teori som går ut på at et visst antall variable er knyttet sammen ved en eller flere relasjoner, ligger i at vi har adgang til observasjoner for de variable som opptrer. Hvis vi går ut fra at teorispesifikasjonene omfatter alt hva vi finner det forsvarlig å spesifisere *a priori*, så har vi ingen annen kilde for informasjon om relasjonene enn det som observerte data kan gi. Spørsmålet reiser seg da om den informasjon som ligger i *a priori*-spesifikasjonene og i "adgang til observasjoner" tilsammen gir tilstrekkelig informasjon om den eller de relasjoner vi ønsker å tallfeste. Hvis informasjonen er tilstrekkelig, sier vi at vedkommende relasjon er identifiserbar. Denne generelle formulering er langt fra presis nok til fullt ut å klarlegge arten og innholdet av betingelsene for identifiserbarhet, men den antyder problemets karakter.

Vi skal bruke noen enkle eksempler til å illustrere mer konkret bakgrunnen for denne problemstillingen. Spesielt skal vi se på hva slags a priori informasjon det her er tale om, og hva vi forstår med informasjon fra observerte data.

Vi ser først på det tilfellet da vår a priori informasjon er at to observerbare variable, x og y , er knyttet sammen ved en eksakt relasjon,

$$(2.1) \quad y = f(x),$$

der f kan være en kontinuerlig funksjon med et bestemt definisjonsområde. Vi antar foreløpig at vår a priori informasjon ikke sier noe annet om f enn at den eksisterer. Dessuten forutsetter vi at det er dekning for å si at y og x ikke er båndlagt i sin variasjon på noen annen måte enn ved at de inngår i (2.1). Ut fra disse opplysningene kan vi lett se hva som er det mulige område for observasjoner av y og x . Det er ikke lagt restriksjoner på x , som følgelig kan anta alle verdier i definisjonsområdet for f , og til hver x -verdi tilordner funksjonen en ganske bestemt y -verdi. Det mulige område for samhørende observasjoner av x og y "dekker" således funksjonen over hele dens a priori bestemte definisjonsområde. Vi har derfor adgang til å bestemme funksjonen fullstendig (f.eks. grafisk) ved hjelp av data, og konklusjonen er dermed klar: Den eksakte funksjonen f er identifiserbar under de spesifiserte forutsetninger.

Det kan være grunn til å understreke at vår konklusjon ovenfor om identifiserbarhet utelukkende bygger på formelle egenskaper. Det er således ingen referanse til faktisk foreliggende observasjoner eller til noen bestemt plan for å skaffe til veie

observasjoner, men bare til mulighetsområdet for observasjoner. Det avgjørende er om - og i tilfelle hvor sterkt - a priori restriksjoner begrenser dette mulighetsområdet. Vi merker oss dessuten at mulighetsområdet omfatter en uendelig mengde observasjonspaar (y_i, x_i) , når funksjonen f er kontinuerlig over sitt definisjonsområde. Det er selvsagt utelukket å ha et uendelig antall observasjoner "i praksis". Men som i nær beslektede matematiske problemstillinger er det tilstrekkelig at muligheten er til stede for å skaffe observasjoner "som ligger så nær hverandre som vi måtte ønske". Det skulle ikke være nødvendig å gå nærmere inn på dette.

Vi har hittil ikke direkte nevnt den mulighet at x kunne være en stokastisk variabel, med en bestemt (kontinuerlig) sannsynlighetsfordeling over definisjonsområdet for funksjonen f . (I så fall ville også y være en stokastisk variabel, med en fordeling bestemt av fordelingen til x , og av funksjonen f .) Konkret ville dette bety at det ikke er adgang til å velge ut verdier av x (med tilhørende y -verdi). Men ved gjentatte "trekninger" fra fordelingen for x - uten begrensning på antallet - vil vi også i dette tilfelle få observasjoner spredt over hele variasjonsområdet for x . For spørsmålet om f er identifiserbar er det derfor i vårt eksempel ikke vesentlig om x er en stokastisk eller en fri variabel.¹⁾ En kontinuerlig sannsynlighetsfordeling for x over hele dens variasjonsområde legger ikke noe bånd på hvilke verdier x kan anta, men har referanse til hyppighetene av x -verdier over området.

Siden vårt resonnement ovenfor ikke forutsatte noe annet om den kontinuerlige funksjonen f enn dens eksistens, så er det uten videre klart at vår konklusjon gjelder nesten uansett funksjonens form. Innenfor rammen av eksemplets spesielle forutsetninger er det alltid t i l - s t r e k k e l i g for identifiserbarhet av en funksjon at mulighetsområdet ikke er pålagt andre restriksjoner enn de som funksjonen selv på-

1) Det er vanlig å bruke stor bokstav for stokastiske variable og liten bokstav for verdier av den variable. Siden denne distinksjonen ikke

legger. Vi innser dessuten lett at denne betingelsen er nødvendig når vi ikke har annen a priori informasjon om f enn at den eksisterer. Enhver begrensning av mulighetsområdet vil da bety at vi står uten informasjon om funksjonen over det utelatte område. Men dette tilfellet er selvsagt nokså uinteressant fra et praktisk synspunkt. Det som har interesse er at i alle de tilfellene da vi vet at den tilstrekkelige betingelsen som vi har referert ovenfor, er oppfylt, så kan vi uten videre undersøkelse fastslå identifiserbarhet uansett funksjonens form.

Vårt eksempel med x og y eksakt forbundne er klart urealistisk. Men resonnementet kan stort sett gjennomføres etter samme linjer, når vi - mer realistisk - innfører et stokastisk restledd i relasjonen. Relasjonen har da formen

$$(2.2) \quad y = f(x) + u$$

der u er et ikke-observerbart stokastisk restledd som vi kan postulere har forventning lik null. Om restleddet forutsetter vi dessuten at det har en (kontinuerlig) sannsynlighetstetthet, $p(u)$, som er uavhengig av hvilke verdier x antar. Hvis x forutsettes ikke-stokastisk, betyr dette at x ikke forekommer som parameter i tettheten p . Hvis x forutsettes stokastisk, er tolkningen at x og u er stokastisk uavhengige variable. Det er dessuten, i analogi med det første eksemplet, en forutsetning at det ikke foreligger andre restriksjoner på y , x og u enn de som er spesifisert, medregnet at de inngår i (2.2).

Vi kunne konkretisere innholdet i (2.2) ved f.eks. å la y stå for etterspurt kvantum av en vare i et marked, og x for prisen. Det må da være underforstått at andre forklaringsfaktorer for y ikke viser andre former for variasjon i "eksperimentsituasjonen" enn at de kan tolkes som komponenter av den tilfeldige variasjon representert

ved det stokastiske restledd. Hvis dette er klart urealistisk, må funksjonen f endres slik at den får som argumenter alle forklaringsvariable som antas å ha vist systematisk variasjon. Men for vår problemstilling bringer ikke tilfellet med flere forklaringsvariable inn noe vesentlig nytt.

Relasjon (2.2) sammen med de øvrige spesifikasjoner gir nå en klar oppskrift for hvorledes y -verdier oppstår. Vårt problem er i første omgang om vi kan kvantifisere denne teorien, dvs. bestemme både funksjonen f og tettheten p , ved hjelp av samhørende observasjoner av y og x når vi har adgang til data fra hele det mulige område for observasjoner.

Siden vi ikke vet noe a priori om formen på funksjonen f , er det klart at vi - som i det første eksemplet - må ha adgang til observasjoner fra hele variasjonsområdet for x . Det som kommer i tillegg i dette eksemplet, er at observasjonene skal gi informasjon om to funksjoner, både f og p . Men det er lett å se at dette ikke skaper problemer under våre forutsetninger, i og med at vi har adgang til et ubegrenset antall observasjoner. Den uavhengige variasjon i restleddet f o r e n h v e r x - v e r d i innebærer at vi kan skille ut observasjoner som har samme x -verdi, men varierende y -verdier. Dette gir en observert fordeling av y -verdier for e n h v e r x -verdi. Ved voksende antall observasjoner vil disse konvergere mot sannsynlighetsfordelinger for y , som er betinget av en x -verdi. Men av (2.2) og forutsetningen om at u har forventningsverdi null for enhver x følger det at disse betingede fordelingene for y gir full informasjon både om funksjonen f og om tettheten p . Det første følger av at $f(x)$ danner forventningsverdiene i de betingede fordelingene for y . Det annet følger at at $p(u)$ bare atskiller seg fra de betingede sannsynlighetstetthetene for y ved å ha forventningsverdien null.

Konklusjonen er altså at det her er mulig å skaffe tilstrekkelig informasjon til å identifisere både f og p ; relasjonen (2.2) er identifiserbar. Som i det første eksemplet gjelder denne konklusjonen uansett funksjonsform for f , og den gjelder uansett formen på fordelingen for u .

Vårt eksempel gjenspeiler, i forenklet form, en nokså generell problemstilling som har dannet mønster for utvikling av forskjellige metoder i den matematiske statistikk. Oftest har data fra et kontrollert eksperiment vært utgangspunktet. Det er - som i vårt eksempel - karakteristisk for disse problemstillingene at det ikke oppstår noe egentlig identifikasjonsproblem, bare et krav om å vise all mulig påpasselighet slik at eksperimentet svarer til de teoretiske spesifikasjoner. Men når slike metoder skal anvendes på ikke-eksperimentelle data - noe det prinsipielt ikke er noe i veien for - er det ingen mulighet for å påvirke datasituasjonen. Vi må da godta datamaterialet slik det oppstår. Ved å ty til teoretiske overveielser kan vi finne ut om data er blitt til på en slik måte at det er mulig å oppnå den informasjon vi ønsker. Hvis slike overveielser klarlegger at relasjonens variable - i vårt eksempel y , x og u i relasjon (2.2) - ikke er bundet i sin variasjon av andre relasjoner, så er relasjonen like selvfølgelig identifiserbar som i en situasjon da data blir til ved et kontrollert eksperiment. Men hvis teoretiske overveielser bringer fram at relasjonens variable er bundet i sin variasjon også av andre relasjoner, så foreligger en situasjon som det er grunn til å undersøke nærmere. Konklusjonen av disse undersøkelsene kan da enten bli at restriksjonene som andre relasjoner pålegger, ikke hindrer identifiserbarhet, eller at de gjør det.

Konsekvensen av kravet om teoretiske overveielser for å klarlegge hvorledes data blir til, er vidtrekkende for mange typer av økonomiske undersøkelser. F.eks. i tilfeller da markedsdata er den eneste tilgjengelige kilde for observasjoner kan konsekvensen være at vi ender opp med en modell med ganske mange relasjoner. Istedenfor en forholdsvis oversiktlig situasjon med en enkelt relasjon får vi da et simultant system av relasjoner å holde styr på, og dette på tross av at våre interesser kanskje utelukkende er knyttet til den ene relasjon. Det er derfor ikke til å unngå at k r i t e r i e r for identifikasjon av en relasjon må ta utgangspunkt i egenskapene ved alle relasjonene i et slikt simultant system. Mer spesielt er det klart at formelle kriterier har som forutsetning at de teoretiske overveielser er avsluttet, slik at all a priori informasjon om problemstillingen er sammenfattet i et formalisert system av relasjoner.

I økonomiske anvendelser vil en ofte kunne trekke på veletablert økonomisk teori når det gjelder hva slags relasjoner som "hører sammen". Om f.eks. den relasjon vi er interessert i å kvantifisere uttrykker en teori for samvariasjon mellom volumstørrelser for produksjonen av et gode og for innsatsen av spesifiserte produksjonsfaktorer, mens de data vi har adgang til er blitt til også under påvirkning av produsentens markedstilpasning, så er det en standard problemstilling i lærebøker å forklare hvorledes teorier for produsentens tilpasning simultant bestemmer produksjon og faktorinnsatser som funksjoner av markedsprisene. Likevel er det klart at det står igjen vesentlige problemer med å tilpasse slike standard lærebokoppskrifter til konkrete situasjoner. Det som ofte refereres til som "identifikasjonsproblemet" uttrykker nettopp dette at det alltid vil være plass for overveielser og tvil om hva som er g o d t e o r i for hvorledes data blir til. Når teorien er gitt en bestemt form i et spesifisert system av rela-

sjoner, er det som står igjen å gjøre bare problematisk i den snevrere forstand at det kan være vrient å utlede kriterier for identifiserbarhet.

Økonomisk teori er nokså summarisk når det gjelder teori for stokastiske elementer i relasjonene. I økonometriske anvendelser avspeiles dette altfor ofte ved at teoretiske overveielser erstattes med en slags standardforutsetninger om egenskapene til stokastiske restledd. Det kan være et akseptabelt forsvar for et valg av slike forutsetninger at en mener de dekker de faktiske forhold i det tilfellet som foreligger. Men den begrunnelse at teoretiske overveielser om restleddenes egenskaper er av underordnet betydning, og at de kan erstattes av en slags erfaringsmessig etablerte standardforutsetninger (eller liknende), er ikke holdbar. I senere anvendelser av identifikasjonskriterier vil vi få se eksempler på at a priori kjennskap til restleddenes fordelingsegenskaper kan være avgjørende for identifikasjonsegenskapene på samme måte som a priori kjennskap til relasjonenes øvrige komponenter kan være det.

Identifikasjonsproblemets generelle karakter er i alt vesentlig den samme uansett hvilken funksjonsform som uttrykker samvariasjonen mellom variable og uansett hvilken funksjonsform som uttrykker sannsynlighetsfordelingen for restleddet. Den egenskap som er avgjørende for identifiserbarhet av en relasjon er alltid om, og hvor sterkt, det mulige variasjonsområde for relasjonens variable innsnevres som følge av at de variable også inngår i andre relasjoner, eller på annen måte er underlagt restriksjoner. Men k r i t e r i e n e for identifiserbarhet vil selvsagt variere alt etter hvilken a priori spesifisert form en funksjon er gitt. Hvis vi a priori spesifiserer svært lite om en funksjon - som i eksemplene foran - blir kravene strenge. Og omvendt, hvis vi spesifiserer nesten alt om en funksjon

a priori, blir kravene til informasjon fra data mer beskjedne. For økonomiske anvendelser er tilfellene som krever svært mye informasjon fra data, nærmest uten interesse. Det som det i praksis kan bli tale om, er spesifikasjoner som går så langt at funksjonen er fullstendig karakterisert ved et forholdsvis lite antall konstante parametre. Dette betyr at spørsmålet om en funksjon er identifiserbar kan behandles som et spørsmål om et visst antall parametre er identifiserbare. Men selv denne avgrensingen til parametriske tilfeller - som her har referanse både til funksjonsformen for samvariasjon og til sannsynlighetsfordelingen for restleddet - gir rom for mange varianter av funksjonsformer. Så å si hver variant vil kreve spesiell behandling. Lite kan derfor sies generelt om kriterier for identifikasjon utover de alminnelige synspunktene som vi trakk fram i tilknytning til eksemplene. Det er vesentlig det parametriske tilfellet da samvariasjonen er spesifisert ved lineære funksjoner, og sannsynlighetsfordelingen for relasjonenes restledd er spesifisert ved parametre for forventningsverdier, varianser og kovarianser, som er gjennomdrøftet, og som er behandlet i lærebøker.

Vi skal i det følgende holde oss til spørsmålet om identifikasjon av parametre i lineære relasjoner med stokastiske restledd. Det som da i særlig grad vil kreve oppmerksomhet, er spørsmål av algebraisk karakter. I dette ligger et "faremoment". Det kan bli fristende å interessere seg for denne algebraen for dens egen skyld, noe som i og for seg er aldeles utmerket, men - og her ligger faremomentet - på bekostning av interessen for identifikasjonsproblemet. Det kan da være til hjelp å ha i minne de mer generelle synspunktene som ikke er avhengig av en lineær funksjonsform.

Avgrensingen til lineære funksjoner utelukker ikke de tilfellene da en ikke-lineær funksjonsform kan transformeres til lineær

form (f.eks. at en funksjon kan uttrykkes på lineær form i logaritmene til de variable). Men i et simultant lineært system må selvsagt en variabel være ens transformert i alle relasjoner hvor den opptrer, og det setter grenser for å utnytte slike transformasjoner. Det betyr en reell begrensning for økonometriske anvendelser at kriteriene forutsetter linearitet.

En ytterligere begrensning for anvendelser ligger i at også parametrene skal forekomme lineært i relasjonene: m.a.o. at relasjonene har formen

$$y = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_k x_k + u$$

der tilfeller som f.eks. $a_2 = \log a_1$ e.l. er utelukket. (Her står u for relasjonens restledd).

For tilfeller som ikke dekkes ved klassen av lineære modeller med stokastiske restledd, foreligger det ikke ferdig utviklede algebraiske systemer for undersøkelser av identifiserbarhet. I denne kategori faller bl.a. såkalte "modeller med feil i de variable", selv om disse har en lineær struktur. Det som skaper vanskeligheter for denne type av modeller, er at relasjonene inneholder flere stokastiske komponenter (alle variable har "feilledd"). I lærebokframstillinger kommer det ikke alltid fram at en del av vanskelighetene i dette tilfelle skyldes uklarhet om identifikasjonsbetingelsene.¹⁾ Diskusjonen er ofte direkte rettet mot å finne gode estimatorer for modellens parametre uten at det på forhånd er klarlagt om modellens spesifikasjoner og den foreliggende datasituasjon gir tilstrekkelig informasjon til å gjøre estimering meningsfylt.

Det bør være en hovedregel at undersøkelser av identifiserbarhet inngår som en integrert del av arbeidet med å etablere en økonometrisk modell.

1) Malinvaud's lærebok behandler spørsmålet forholdsvis utførlig i Ch. 10, § 8.

Det første trinn i slike undersøkelser vil være av økonomisk-teoretisk karakter og ha som siktepunkt å få med i modellen alle relasjoner som kan ha influert data på en eller annen måte. Når dette trinn er avsluttet, vil situasjonen kunne være at modellen dels består av relasjoner som det er analysens formål å kvantifisere, dels av relasjoner som er analysens formål uvedkommende. Det vil alltid være av interesse å gjennomføre dette første trinn, uansett hva slags funksjonsformer og stokastiske komponenter som inngår i relasjonene.

Det annet trinn blir da en mer formell undersøkelse av identifikasjonsbetingelser for de parametre som har interesse. En vil ikke stå helt uten holdepunkter på dette annet trinn selv om en har tilfeller da metodene for enkle lineære modeller ikke kan brukes. For det første er det ikke utelukket i forholdsvis enkle situasjoner at en kan utvikle, så å si fra bunnen av, kriterier som utnytter modellens spesielle egenskaper. For det annet foreligger det alltid den mulighet å betrakte et lineært tilfelle som første tilnærming i en Taylor-utvikling av en mer generell funksjon over et avgrenset område. I noen tilfeller kan en derved langt på vei (ved "lokale" kriterier), eller kanskje fullt ut, klarlegge forholdet. Og for det tredje, så gjelder det alltid at en parameter er identifiserbar dersom det eksisterer en `k o n s i s t e n t e s t i m a t o r` for den. En konsistent estimator for en parameter konvergerer i sannsynlighet mot parameteren når samplets størrelse vokser over alle grenser; dvs. den har nettopp den egenskap som forlanges for identifiserbarhet (jfr. vårt resonnement i tilknytning til eksemplene). Betydningen av dette ligger vesentlig i at det kan falle lettere å undersøke om en "intuitivt rimelig" estimator er konsistent enn å angripe identifika-sjonsspørsmålet systematisk. Men også slike undersøkelser forutsetter at første trinn er avsluttet. Uten at modellen er fullt spesifisert, kan ikke egenskapen konsistens undersøkes. Dessuten står en selvsagt uten noen konklusjon hvis letingen etter en konsistent estimator ikke gir noe resultat.

Blant økonomiske modeller med lineære relasjoner og stokastiske restledd danner modeller som er karakterisert ved at relasjonene kan ordnes i et såkalt rekursivt system, en interessant klasse. Det vil bli vist i avsnitt 8 at alle parametre i en slik modell er identifiserbare (det er en del av forutsetningen om rekursivitet at relasjonene har ukorrelerte restledd). Vi merker oss som et prinsipielt viktig punkt at det er et økonomisk-teoretisk spørsmål om en modell skal ha en rekursiv eller en hvilken som helst annen utforming. De teoretiske overveielser som fører til en bestemt modellspesifikasjon, må helt underordnes synspunktet at modellen skal forklare observasjonene og må foregå uten sideblikk til identifiseringsegenskaper. Det er selvsagt uinteressant hva slags identifiseringsegenskaper en modell måtte ha, dersom den bevisst (eller ubevisst) er feilspesifisert på en slik måte at den får disse egenskapene.

Det kan være grunn til å nevne at det ofte foretas en tredeling av identifiseringsegenskaper for en parameter ved at det innenfor kategorien identifiserbare parametre skilles mellom de som er "akkurat identifiserte" og de som er "overidentifiserte". Denne siste distinksjonen berører bare skillet mellom tilfellet da vi har akkurat nok informasjon og tilfellet da vi har mer enn nok informasjon til å fastslå identifiserbarhet. Dette skillet er viktig i forbindelse med estimering og testing av parametre, men vi behøver ikke trekke det inn her.

3. Økonomiske modeller; begreper og terminologi.

Innenfor økonomiet er diskusjonen av identifiseringsspørsmålet sterkt knyttet til begreper og terminologi som er utviklet innenfor dette fagområde. Vi skal kort presentere de begrepene vi får bruk for, og gi noen kommentarer.

E n ø k o n o m e t r i s k m o d e l l er formelt en sammenstilling av strukturrelasjoner til et simultant system.

E n s t r u k t u r r e l a s j o n er en teori for økonomiske enheters handlemåte eller for et samspill mellom økonomiske enheter, f.eks. i et marked. Den er en selvstendig teori i den forstand at dens gyldighet er uavhengig av om den inngår i en modell sammen med andre strukturrelasjoner, og uavhengig av hvilket teoretisk innhold modellens eventuelle øvrige relasjoner måtte ha.

E t s i m u l t a n t s y s t e m av strukturrelasjoner er karakterisert ved at noen av systemets variable opptrer i flere relasjoner og derved er pålagt den restriksjon at de simultant må tilfredsstille flere relasjoner. Det er en vesentlig karakteristikk av en økonometrisk modell at den sammenfatter enkeltteorier til et teorisystem.

De observerbare variable som er med i en økonometrisk modell, faller naturlig i to grupper. De e n d o g e n e v a r i a b l e omfatter den gruppen som blir bestemt av modellens relasjoner når modellens øvrige variable, de e k s o g e n e v a r i a b l e , er gitt.

I dynamiske utforminger kan tilbakedaterte endogene variable (de refererer til en foregående periode eller tidsangivelse) opptre som forklaringsvariable i strukturrelasjonene. For noen formål, bl.a. for spørsmålet om en strukturrelasjon er identifiserbar, er skillet mellom slike p r e d e t e r m i n e r t e e n d o g e n e variable og modellens eksogene variable uten betydning. Hovedskillet går da mellom de l ø p e n d e d a t e r t e endogene variable og de øvrige, som danner gruppen predeterminerte variable og består av både de predeterminerte endogene variable og de eksogene variable.

For ikke å komplisere betegnelseene unødige ser vi i det følgende bort fra dynamiske utforminger der det forekommer predeterminerte endogene variable. Vi får da bare bruk for skillet mellom gruppen endogene variable og gruppen eksogene variable.

Ofte vil de variable i strukturrelasjonene være spesifisert på en måte som fører til at det gjelder definisjonsmessige sammenhenger mellom noen av dem. Det kjennetegner slike *definisjonsrelasjonene* at de gjelder eksakt - de inneholder ikke stokastiske elementer - og at de *a priori* er fullstendig kjent - de inneholder ingen ukjente parametre.

Det er to likeverdige måter for å behandle slike tilfeller. Vi kan enten ta med definisjonsrelasjonene som en del av modellens simultane relasjonssystem og beholde alle variable, eller vi kan "bruke opp" definisjonsrelasjonene til å eliminere variable i relasjonssystemet; hver definisjonsrelasjon gir grunnlag for å eliminere en variabel. Den første måten, som er den naturlige når systemet stilles opp, har visse ulemper for diskusjonen av modellens formelle egenskaper, fordi den tvinger oss til å holde et klart skille mellom de to typer av relasjoner i alle resonnementer. Inntil videre vil vi derfor ta utgangspunkt i en modell som bare omfatter strukturrelasjoner, i det eventuelle definisjonsrelasjoner forutsettes å være brukt til å eliminere "overflødige variable".

Inndelingen av relasjoner i en økonometrisk modell i bare to typer, strukturrelasjoner og definisjonsrelasjoner forutsetter at den siste typen også omfatter relasjoner som formelt ikke skiller seg fra definisjonsrelasjoner i vanlig forstand, men som reelt har et mer spesifikt økonomisk-teoretisk innhold. Et typisk eksempel er at det i modellen forutsettes likhet mellom etterspørsel og tilbud i et marked. En slik forutsetning, som ofte kan komme til uttrykk indirekte ved at det brukes samme variabelbetegnelse for etterspørsel og tilbud, bygger på en bakenforliggende teori

for hvorledes et marked fungerer. En kan si at forutsetningen kan uttrykkes ved samme enkle form som en definisjonsrelasjon fordi den bare sammenfatter resultatet av en i realiteten ganske komplisert teori for en markedsprosess. For drøftingen av de formelle egenskaper ved en økonometrisk modell har disse synspunkter og begrepsdistinksjoner betydning fordi de klarlegger at inndelingen i strukturrelasjoner og definisjonsrelasjoner ikke gir noe tilsvarende skarpt skille mellom teorirelasjoner og begrepsdefinisjoner. Mer spesielt er det viktig å være klar over at markedsrelasjoner av typen etterspørsel er lik tilbud, er medvirkende til at strukturrelasjoner danner et simultant system. Hvis teoretiske overveielser fører oss til en annen form for markedklarering - det kan f.eks. komme til en eller flere eksogene variable - så vil dette generelt endre karakteren av det simultane system som sammenfattes i den økonometriske modell.

4. Relasjonssystem, strukturform og redusert form.

Et lineært likningssystem som har formen

$$(4.1) \quad \beta_{i1}x_1 + \beta_{i2}x_2 + \dots + \beta_{in}x_n \\ + \gamma_{i1}z_1 + \gamma_{i2}z_2 + \dots + \gamma_{im}z_m + u_i = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

inneholder alle elementer vi trenger for å presentere lineære økonomiske modeller med stokastiske restledd.

Systemet har n likninger og like mange observerbare endogene variable, x_1, x_2, \dots, x_n . Det er i alt m observerbare eksogene variable, z_1, z_2, \dots, z_m , (jfr. at vi ser bort fra tilfeller der det forekommer predeterminerte endogene variable). Det (vanlige) tilfellet da relasjonene har konstantledd, vil være dekket ved å omdefinere f.eks. z_1 til en hjelpevariabel som skal holdes konstant; enklest settes den lik verdien 1. Det ikke-observerbare stokastiske restledd i likning nr. i er representert ved u_i .

Systemets koeffisienter for de endogene variable danner en kvadratisk matrise med n^2 elementer. For matrisen bruker vi betegnelsen B .

$$B = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \dots & \beta_{1n} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \dots & \beta_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \beta_{n1} & \beta_{n2} & \dots & \beta_{nn} \end{bmatrix} = (\beta_{ij}); \quad \begin{array}{l} i=1, 2, \dots, n \\ j=1, 2, \dots, n. \end{array}$$

Koeffisientene for systemets eksogene variable danner en rektangulær matrise med n linjer og m kolonner, ialt $n \cdot m$ elementer. For matrisen bruker vi betegnelsen C .

$$C = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \cdots & \gamma_{1m} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \cdots & \gamma_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{n1} & \gamma_{n2} & \cdots & \gamma_{nm} \end{bmatrix} = (\gamma_{ik}); \quad \begin{array}{l} i = 1, 2, \dots, n \\ k = 1, 2, \dots, m. \end{array}$$

Koeffisientene i likning nr. i er altså ordnet i de to matrisenes linje nr. i .

De ikke-observerbare restleddsvariable u_1, u_2, \dots, u_n må, siden de er stokastiske, tilordnes en (simultan) sannsynlighetsfordeling. Vi skal utelukkende betrakte tilfeller da vi bare spesifiserer forventningsverdiene, variansene og kovariansene som konstante parametre i denne simultane sannsynlighetsfordeling. Dette utelukker ikke at det må spesifiseres flere parametre for å karakterisere fordelingen fullstendig; generelt har vi en delspesifisert n -fordeling. (Men med en tilleggsforutsetning om at fordelingen er multinormal, vil fordelingen være helspesifisert.) På grunn av de u -variables karakter av restledd i relasjonene kan de forutsettes å ha forventningsverdier lik null. Formelt uttrykt:

$$E u_i = 0 \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

$$\text{Var } u_i = \sigma_{ii} \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

$$\text{Kovar } u_i u_j = \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad ; \quad i \neq j$$

Variansene og kovariansene danner en kvadratisk matrise med n^2 elementer. For denne matrisen (kovariansmatrisen) bruker vi betegnelsen Σ .

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & \sigma_{2n} \\ \cdot & \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & & \cdot \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & & & & \sigma_{nn} \end{bmatrix} = (\sigma_{ij}); \quad \begin{array}{l} i = 1, 2, \dots, n \\ j = 1, 2, \dots, n. \end{array}$$

(Uttrykt ved standardavvikene, σ_i , har vi pr. definisjon at $\sigma_{ii} = \sigma_i^2$).

Restleddenes forhold til systemets eksogene variable trenger en kommentar. Det som har betydning i denne sammenheng, er om de eksogene variable er spesifisert som stokastiske eller som ikke-stokastiske.

Hvorfor dette skillet er viktig, er det greiest å illustrere ved å se på implikasjonene av at de eksogene variable er stokastiske, med andre ord implikasjonene av at de har en sannsynlighetsfordeling. Vi innser lett at egenskapen eksogen da må innebære et krav om at denne sannsynlighetsfordelingen er uavhengig av sannsynlighetsfordelingen for restleddene. Hvis dette kravet ikke var oppfylt, ville det nemlig være en viss samvariasjon mellom de eksogene variable og restleddene, og denne samvariasjonen ville til dels være bestemt av modellens egenskaper. Den er derfor uforenlig med at de eksogene variables variasjon ble bestemt "utenfor modellen". For våre spesifikasjoner er det et tilstrekkelig krav at hver enkelt restleddsvariabel er u k o r r e l e r t (har kovarians null) med hver enkelt stokastisk eksogen variabel. Det er vanlig å uttrykke dette ved den tilføyelse at forutsetningene om forventningsverdier, varianser og kovarianser for u-ene skal gjelde for alle verdier av modellens eksogene variable. En mer detaljert formulering måtte ta utgangspunkt i en simultan sannsynlighetsfordeling for samtlige restleddsvariable og

eksogene variable, og spesifisere som betingelser pålagt denne at forventningsverdier for hver u_i , tatt i fordelinger som er b e t i n g e t m.h.p. z_1, z_2, \dots, z_m , (men marginale m.h.p. de øvrige restleddsvariable), skal være lik null for alle verdier av z_1, z_2, \dots, z_m . At disse betingede forventningene (som uttrykker regresjonen av u_i m.h.p. alle z -variable) alle er null, i m p l i s e r e r at u_i er ukorrelert med alle z -variable. Dersom de eksogene variable kan oppfattes som ikke-stokastiske, bortfaller mulighetene for slik stokastisk samvariasjon av seg selv. Også dette tilfellet ville være dekket av formuleringen $E u_i = 0$ for alle z_k ($i = 1, 2, \dots, n; k = 1, 2, \dots, m$).

Vi har hittil ikke uttrykkelig markert at (4.1) skal gjelde for samhørende observasjonssett av de variable. Vi gjennomfører en slik markering ved å gi de variable fotskrift t for observasjon nr. t , altså x_{it}, z_{kt} og u_{it} , for $i = 1, 2, \dots, n$ og $k = 1, 2, \dots, m$.

(Markeringen t står ikke nødvendigvis for tidsobservasjoner).

Vi skal gjøre bruk av den forenklede forutsetning at settet (n -tuplet) $(u_{1t}, u_{2t}, \dots, u_{nt})$ er stokastisk uavhengig av ethvert annet sett $(u_{1\tau}, u_{2\tau}, \dots, u_{n\tau})$, der $t \neq \tau$. Settet av restleddsvariable er altså uavhengig og identisk fordelt med forventninger lik null for alle z_{it} og for alle t og med varianser/kovarianser lik σ_{ij} for alle z_{kt} og for alle t . Disse forutsetningene, sett samlet, sies å uttrykke den generelle stokastiske hypotese om relasjonssystemets restledd.

I alle anvendelser vi skal gjøre av (4.1), vil det gjelde som en a priori forutsetning at systemet kan løses med hensyn på de endogene variable x_1, x_2, \dots, x_n . Dette er en forutsetning av økonomisk-teoretisk karakter. Den innebærer et krav om at vi alltid må gi relasjonene i systemet et slikt meningsinnhold at systemet bestemmer hver enkelt av de endogene variable entydig som en (lineær) funksjon av systemets eksogene variable og av et sett av realiserte verdier for de stokastiske restleddsvariable. Formelt er en nødvendig

og tilstrekkelig betingelse for dette at determinanten til liknings-systemets koeffisienter for de endogene variable er forskjellig fra null; med andre ord at determinanten til matrisen B er forskjellig fra null ($|B| \neq 0$). Likeverdige måter å uttrykke dette på, er at linjene i matrisen B er lineært uavhengige, eller at B er en ikke-singulær matrise. Når denne betingelsen er oppfylt, så vil løsningene ha formen

$$(4.2) \quad x_i = \Pi_{i1}z_1 + \Pi_{i2}z_2 + \dots + \Pi_{im}z_m + \epsilon_i, \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Koeffisientene i dette avledede systemet av n likninger danner en rektangulær matrise med n linjer og m kolonner, i alt $n \cdot m$ elementer. For matrisen bruker vi betegnelsen Π .

$$\Pi = \begin{bmatrix} \Pi_{11} & \Pi_{12} & \dots & \Pi_{1m} \\ \Pi_{21} & \Pi_{22} & \dots & \Pi_{2m} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \Pi_{n1} & \Pi_{n2} & & \Pi_{nm} \end{bmatrix} = (\Pi_{ik}); \quad \begin{matrix} i = 1, 2, \dots, n \\ k = 1, 2, \dots, m. \end{matrix}$$

De restleddsvariable ϵ_i ($i = 1, 2, \dots, n$) i systemet (4.2) er avledet av u_1, u_2, \dots, u_n i (4.1). De fremkommer ved løsningen som lineærkombinasjoner av u-ene, med koeffisienter som er elementene i den inverse matrisen til matrisen B. Vi skal bruke β_{ij}^{-1} (" β_{ij} med minus en som toppskrift") som betegnelser for disse elementene. De danner en kvadratisk matrise, B^{-1} , med n^2 elementer.

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} \beta_{11}^{-1} & \beta_{12}^{-1} & \dots & \beta_{1n}^{-1} \\ \beta_{21}^{-1} & \beta_{22}^{-1} & \dots & \beta_{2n}^{-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{n1}^{-1} & \beta_{n2}^{-1} & \dots & \beta_{nn}^{-1} \end{bmatrix} = (\beta_{ij}^{-1}); \quad \begin{array}{l} i = 1, 2, \dots, n \\ j = 1, 2, \dots, n. \end{array}$$

De restleddsvariable i (4.2) er da gitt ved

$$(4.3) \quad \varepsilon_i = -(\beta_{i1}^{-1} u_1 + \beta_{i2}^{-1} u_2 + \dots + \beta_{in}^{-1} u_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Eksempel, n=2, m=1

$$(4.1.a) \quad \beta_{11} x_1 + \beta_{12} x_2 = -(\gamma_{11} z_1 + u_1)$$

$$\beta_{21} x_1 + \beta_{22} x_2 = -(\gamma_{21} z_1 + u_2).$$

$$B = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{bmatrix}; \quad |B| = \beta_{11}\beta_{22} - \beta_{21}\beta_{12}.$$

$$C = \begin{bmatrix} \gamma_{11} \\ \gamma_{21} \end{bmatrix}$$

$$E u_1 = E u_2 = 0.$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{bmatrix}$$

(Eksemplet fortsetter neste side)

$$\begin{aligned}
 x_1 &= \Pi_{11} z_1 + \varepsilon_1 \\
 &= - \left[\frac{\beta_{22}}{\beta_{11}\beta_{22} - \beta_{21}\beta_{12}} \gamma_{11} + \frac{(-\beta_{12})}{\beta_{11}\beta_{22} - \beta_{21}\beta_{12}} \gamma_{21} \right] z_1 \\
 &\quad - \left[\frac{\beta_{22}}{\beta_{11}\beta_{22} - \beta_{21}\beta_{12}} u_1 + \frac{(-\beta_{12})}{\beta_{11}\beta_{22} - \beta_{21}\beta_{12}} u_2 \right].
 \end{aligned}$$

(4.2.a)

$$\begin{aligned}
 x_2 &= \Pi_{21} z_1 + \varepsilon_2 \\
 &= - \left[\frac{(-\beta_{21})}{\beta_{11}\beta_{22} - \beta_{21}\beta_{12}} \gamma_{11} + \frac{\beta_{11}}{\beta_{11}\beta_{22} - \beta_{21}\beta_{12}} \gamma_{21} \right] z_1 \\
 &\quad - \left[\frac{(-\beta_{21})}{\beta_{11}\beta_{22} - \beta_{21}\beta_{12}} u_1 + \frac{\beta_{11}}{\beta_{11}\beta_{22} - \beta_{21}\beta_{12}} u_2 \right].
 \end{aligned}$$

Formlene er skrevet ut i tilstrekkelig detalj til at elementene i matrisene

$$\Pi = \begin{bmatrix} \Pi_{11} \\ \Pi_{21} \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21}^{-1} & \beta_{22}^{-1} \end{bmatrix}$$

lett kan avleses (som funksjoner av β -koeffisienter og γ -koeffisienter).

Om de eksogene variable skulle det ikke være noe å tilføye, som ledd i en beskrivelse av modellen, utover det som allerede er sagt om deres forhold til modellens restleddsvariable. De representerer problemets uavhengige variable, de variable som systemet ikke forklarer eller gir noen teori for. Men for spørsmålet om systemets ukjente parametre er identifiserbare er det - jfr. drøftelsene i avsnitt 2 - av avgjørende betydning at de eksogene variable viser tilstrekkelig uavhengig innbyrdes variasjon. Dette kommer vi tilbake til i neste avsnitt.

Alle generelle spesifikasjoner av relasjonssystemet, de som gir rammen for den klasse av modeller vi skal ta for oss, skulle nå være nevnt. Det er ikke nødvendig for vårt formål å gi i detalj om hva strukturrelasjonene konkret skal stå for, om det er produktfunksjoner,

etterspørselsrelasjoner, eller hva det måtte være. Siden de alle er lineære, er de fullt ut karakterisert ved koeffisientene og ved restleddenes egenskaper. Den forhåndsinformasjon som økonomisk-teoretiske overveielser kan gi, må derfor ta form av utsagn om koeffisientene og om elementene i matrisen Σ (siden den generelle stokastiske hypotese for restleddene her er avgrenset til å gjelde varianser og kovarianser, med alle forventningsverdier alltid lik null).

I relasjonssystemet (4.1) er alle observerbare variable tilordnet hver sin koeffisient. Hver likning er ført opp med n β -koeffisienter og m γ -koeffisienter. Restleddet står oppført uten koeffisient. Siden restleddet ikke er direkte observerbart, har det i alminnelighet ingen hensikt å gjøre det. Om vi f.eks. i likning nr. i erstattet u_i med $v_i = h_i u_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$), så ville også disse ha forventningsverdier lik null, og de ville ha varianser/kovarianser lik $h_i \sigma_{ij} h_j$, som bare skiller seg fra σ_{ij} ved et sett av konstanter av formen $h_i \cdot h_j$. Tilordning av koeffisienter h_i for restleddene ville derfor ikke bety noe som helst for den generelle statistiske hypotese, som går ut på at variansene og kovariansene er ukjente konstanter. Vi ser at det heller ikke ville bety noe for en spesiell hypotese om at f.eks. noen av kovariansene er null. Men formelt har det den betydning at relasjonene må oppfattes som homogene i koeffisientene; innenfor hver enkelt likning er det bare den relative størrelse av koeffisientene som betyr noe. Mer presist: Den teori som uttrykkes ved en strukturrelasjon, endrer ikke innhold dersom alle relasjonens koeffisienter og restleddene multipliseres med samme konstant. Vi kan derfor alltid foreta en **n o r m a l i s e r i n g** av koeffisientene i hver relasjon, d.v.s. vi kan a priori fikse en bestemt verdi (vanligvis +1 eller -1) for en av koeffisientene. Det er hensiktsmessig for framstillingen å beholde alle koeffisienter uspesifisert i formen (4.1), og å behandle normaliseringen som en separat betingelse på settet av koeffisienter. Konklusjonen av dette

er altså at en normaliseringsregel alltid (under våre forutsetninger) bestemmer en koeffisient i hver likning, i alt n koeffisienter.

Det er nærmest et utenkelig tilfelle at alle modellens variable skulle forekomme i hver eneste strukturrelasjon. Det vanlige er at det er forholdsvis få variable som opptrer i flere enn en (eller et par) likninger. Siden likningssystemet (4.1) er utskrevet slik at alle modellens variable er representert i alle likninger, så betyr dette at vi, i relasjon til denne spesifikasjonen, har a priori informasjon om koeffisientene til alle utelatte variable i en likning; disse koeffisientene må settes lik null. Slike "nullrestriksjoner" ("exclusion restrictions") vil i praksis være de som oftest kan pålegges koeffisientene ut fra økonomisk-teoretiske overveielser.

En litt annen type restriksjon får vi når en algebraisk sum av variable forekommer som én variabel i noen relasjoner, men ikke i alle; summens variable er tilordnet hver sin koeffisient i andre relasjoner. Alle variable som inngår i en slik sum (og/eller differens), må da være spesifisert som separate variable i alle relasjoner, og de får like koeffisienter i den relasjon hvor de forekommer som ledd i en sum (eventuelt med fortegnforskjell i differenser).

Også andre former for a priori restriksjoner på koeffisientene kan tenkes, f.eks. at de skal tilfredsstille visse ulikheter, eller endog at de skal ha en a priori kjent verdi (utenom null som har spesialbegrunnelse). Men sett på som mulig a priori informasjon har disse formene en noe annen karakter enn "null-restriksjoner" og "like koeffisienter". Ulikheter må være relativt stramme; ellers gir de ingen tilleggsinformasjon av betydning. Og de må ha a priori karakter; dette vil f.eks. ikke være tilfelle dersom de bygger

på forhåndsbetraktninger av analysens datamateriale. I noen tilfeller kan det kanskje være realistisk å anta en a priori sannsynlighetsfordeling for verdien av en koeffisient. En annen mulighet er å sette en øvre og en nedre grense for verdien, og en tredje at en koeffisient kan antas å være numerisk kjent a priori. I prinsippet er det mulig å ta hensyn til disse typene av restriksjoner på koeffisientene. Vi skal her vesentlig ta for oss det vi har kalt nullrestriksjoner. Like koeffisienter vil bli behandlet i avsnitt 8. Tilfeller da det forutsettes en a priori sannsynlighetsfordeling for koeffisientene, vil ikke bli behandlet.

A priori restriksjoner som kan komme på tale for modellens stokastiske hypotese vil oftest ta form av nullrestriksjoner for noen av elementene i kovariansmatrisen Σ . En forutsetning om at en av variansene var null, ville innebære at den tilordnede restleddsvariable måtte ha en degenerert sannsynlighetsfordeling (både forventningsverdi og varians lik null). Dersom definisjonsrelasjoner (eller andre eksakte relasjoner) hadde vært tatt med i (4.1), kunne en nullrestriksjon for en varians ha vært brukt til å uttrykke at et restledd ikke forekommer. For andre relasjonstyper vil nullrestriksjoner for restleddsvarianser ikke komme på tale. De aktuelle tilfellene vil være at det kan sies å foreligge a priori informasjon om at noen eller alle kovarianser er null. Om restriksjoner i form av ulikheter eller bestemte fikserte verdier gjelder det samme som for restriksjoner på systemets koeffisienter.

Vi kan kort sammenfatte de spesifikasjoner som er gitt hittil, i følgende punkter:

- (i) Likningssystemet (4.1) innfører to typer av variable (endogene, eksogene) foruten stokastiske restledd, og avgrenser modellen som lineær, med additive stokastiske restledd. Systemet har like mange likninger som endogene variable (systemet sies da å danne et komplett sett av likninger).
- (ii) Matrisen B av koeffisienter for systemets endogene variable kan - med en økonomisk begrunnelse - forutsettes å være ikke-singulær (å ha determinant forskjellig fra null). Systemet kan derfor alltid bringes på formen (4.2). Hver enkelt endogen variabel er her gitt som en lineær funksjon av de eksogene variable og av restleddene. Den lineære form i restleddene er gitt ved (4.3).
- (iii) De eksogene variable må oppfylle visse betingelser om innbyrdes uavhengig variasjon. Dette vil bli nærmere behandlet i neste avsnitt.
- (iv) For de restleddsvariable i (4.1) gjelder en generell stokastisk hypotese som går ut på at alle restleddene har forventningsverdier lik null (for alle z_{kt} og for alle t), og at alle elementer i kovariansmatrisen Σ er konstante parametre.
- (v) Med en økonomisk begrunnelse vil noen av koeffisientene i likningene og noen av parametrene i matrisen Σ kunne pålegges a priori restriksjoner, oftest i form av null-restriksjoner (d.v.s. at noen koeffisienter eller Σ -parametre kan settes lik null).
- (vi) En normaliseringsregel gir en restriksjon for hver likningskoeffisienter (f.eks. slik at en koeffisient i hver likning gis verdien 1).

Punktene (i) - (iv) beskriver modellens generelle form og egenskaper, mens punktene (v) og (vi) innfører de parameterrestriksjoner som kan pålegges a priori på formen (4.1).

Formen (4.1) kalles modellens strukturform. Den representerer strukturrelasjonene (eventuelt også definisjonsrelasjoner). For disse gjelder spesifikasjonene i punktene (i) - (vi).

Formen (4.2) kalles modellens reduserte form. På grunn av (ii) kan den avledes entydig fra strukturformen (4.1). Den reduserte form har egenskaper som gir den en sentral plass i utledningen av identifikasjonskriterier.

5. Den reduserte form; identifikasjonsegenskaper.

Det er grunnideen i den modell vi behandler, at de eksogene variable sammen med de stokastiske restleddsvariable bestemmer modellens endogene variable. Denne ide kommer direkte til uttrykk i modellens reduserte form (4.2), som vi her fører opp på ny.

$$(5.1) \quad x_i = \Pi_{i1}z_1 + \Pi_{i2}z_2 + \dots + \Pi_{im}z_m + \varepsilon_i, \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

der ε_i , definert ved (4.3), er en lineær kombinasjon av u_1, u_2, \dots, u_n . Vi finner lett at $E\varepsilon_i = 0$ for alle i , og at varians/kovariansparametrene er gitt ved en matrise, Ω , med elementer ω_{ij} (analogt med Σ og σ_{ij}), der

$$\begin{aligned}
(5.2) \quad \omega_{ij} &= \text{kovar } \varepsilon_i \varepsilon_j = E(\varepsilon_i \varepsilon_j) \\
&= E(\beta_{i1}^{-1} u_1 + \beta_{i2}^{-1} u_2 + \dots + \beta_{in}^{-1} u_n)(\beta_{j1}^{-1} u_1 + \beta_{j2}^{-1} u_2 + \dots + \beta_{jn}^{-1} u_n) \\
&= E \sum_h \sum_k \beta_{ih}^{-1} u_h \cdot u_k \beta_{jk}^{-1} = \sum_h \sum_k \beta_{ih}^{-1} \cdot E(u_h u_k) \cdot \beta_{jk}^{-1} \\
&= \sum_h \sum_k \beta_{ih}^{-1} \sigma_{hk} \beta_{jk}^{-1}.
\end{aligned}$$

Eksempel, når $n=2$, ($i=1,2$; $j=1,2$)

$$\begin{aligned}
(5.2.a) \quad \omega_{ij} &= E(\beta_{i1}^{-1} u_1 + \beta_{i2}^{-1} u_2)(\beta_{j1}^{-1} u_1 + \beta_{j2}^{-1} u_2) \\
&= E(\beta_{i1}^{-1} u_1 \cdot u_1 \beta_{j1}^{-1} + \beta_{i1}^{-1} u_1 \cdot u_2 \beta_{j2}^{-1} + \beta_{i2}^{-1} u_2 \cdot u_1 \beta_{j1}^{-1} + \beta_{i2}^{-1} u_2 \cdot u_2 \beta_{j2}^{-1}) \\
&= \beta_{i1}^{-1} \cdot E(u_1^2) \cdot \beta_{j1}^{-1} + \beta_{i1}^{-1} \cdot E(u_1 u_2) \cdot \beta_{j2}^{-1} + \beta_{i2}^{-1} \cdot E(u_2 u_1) \cdot \beta_{j1}^{-1} \\
&\quad + \beta_{i2}^{-1} \cdot E(u_2^2) \cdot \beta_{j2}^{-1} \\
&= \beta_{i1}^{-1} \sigma_{11} \beta_{j1}^{-1} + \beta_{i1}^{-1} \sigma_{12} \beta_{j2}^{-1} + \beta_{i2}^{-1} \sigma_{21} \beta_{j1}^{-1} + \beta_{i2}^{-1} \sigma_{22} \beta_{j2}^{-1}.
\end{aligned}$$

Helt utskrevet blir f.eks. kovariansen mellom ε_1 og ε_2 :

$$(5.2.b) \quad \omega_{12} = (\beta_{11}^{-1} \beta_{21}^{-1}) \sigma_{11} + (\beta_{11}^{-1} \beta_{22}^{-1} + \beta_{12}^{-1} \beta_{21}^{-1}) \sigma_{12} + (\beta_{12}^{-1} \beta_{22}^{-1}) \sigma_{22}.$$

Tilsvarende får vi for en varians, f.eks. for ε_1 :

$$(5.2.c) \quad \omega_{11} = (\beta_{11}^{-1})^2 \sigma_{11} + 2\beta_{11}^{-1} \beta_{12}^{-1} \sigma_{12} + (\beta_{12}^{-1})^2 \sigma_{22}.$$

Legg merke til at kovar ($\varepsilon_1 \varepsilon_2$) i alminnelighet vil være forskjellig fra null, selv om kovar ($u_1 u_2$) er lik null. Legg også merke til ordningen av faktorene innenfor hvert ledd i summene. Analoge formler vil senere vil bli uttrykt i matrisenotasjon. Den ordningen av faktorer som er brukt her, letter overgangen mellom notasjonssystemene.

Spørsmålet om parametrene Π_{ik} og ω_{ij} i den reduserte form (5.1) - ikke nødvendigvis for alle i , j og k - er identifiserbare, har åpenbart interesse. Koeffisientene Π_{ik} , som vi kunne kalle *virkningskoeffisientene*, sammenfatter alle virkninger på den endogene variable x_i av at den eksogene variable z_k varierer. Eksemplet i avsnitt 4, jfr. spesielt (4.2.a), illustrerer hva slags sammenfatning virkningskoeffisientene står for. I de fleste anvendelser av modellen vil det kanskje være modellen uttrykt på den reduserte form som legges til grunn. Men dette betyr selvsagt ikke at strukturformen er uten interesse. Det er strukturformen som umiddelbart uttrykker modellens teori-innhold og som gir muligheter for kontakt med våre forestillinger om virkeligheten. Kjennskap til den redusert form gir nyttig informasjon, men vi vet mer dersom vi også kjenner parametrene i strukturformen.

Vi kan stort sett behandle spørsmålet om identifikasjon av parametrene i den reduserte form på samme måte som ved drøftelsen av de forenklede modellene (2.1) og (2.2) i avsnitt 2. Siden funksjonsformen f nå er spesifisert som lineær, vil funksjonen være identifiserbar dersom alle koeffisientene er identifiserbare.

Som i avsnitt 2 skal vi først bruke som illustrasjon tilfellet da restledd ikke er med (eksakte relasjoner), og da de eksogene variable kan betraktes som ikke-stokastiske. Det er i dette tilfelle åpenbart at en forutsetning om at det ikke eksisterer noen restriksjoner på variasjonsområdet for de eksogene variable, er *tilstrekkelig* til å sikre identifikasjon av relasjonene i en redusert form. Vi kan da behandle variasjon i en eksogen variabel om gangen, med de øvrige holdt konstante, og konklusjonen om identifiserbarhet følger i hvert tilfelle ved samme generelle resonnerment som i avsnitt 2.

Men vi er også interessert i å kjenne til om noen restriksjoner på variasjonsområdet for de eksogene variable er uten betydning for konklusjonen om identifiserbarhet. I så tilfelle er det nyttig å finne en presis avgrensning av den klasse av restriksjoner som utelukker identifiserbarhet. I konkrete anvendelser kan situasjonen være den at vi har visse restriksjoner på de eksogene variable av definisjonsmessig art, f.eks. at $z_{3t} = (z_{2t})^2$. Da er det viktig å kunne avgjøre om slike restriksjoner har betydning for spørsmålet om identifiserbarhet.

For å bestemme de m koeffisientene $\Pi_{i1}, \Pi_{i2}, \dots, \Pi_{im}$ i likning nr. i fra den reduserte form (5.1) - med restleddene ε_{it} satt lik null for alle t - vil det være tilstrekkelig med m observasjoner av vektoren $(x_{it}, z_{1t}, z_{2t}, \dots, z_{mt})$ dersom observasjonene er fornuftig valgt. For å få med et konstantledd kan f.eks. z_{1t} settes lik 1 for alle t . Når m observasjoner, markert med verdiene 1, 2, ..., m for t , innsettes i likning nr. i etter tur, får vi følgende system av m likninger med referanse til likning nr. i .

$$(5.3) \quad z_{1t}\Pi_{i1} + z_{2t}\Pi_{i2} + \dots + z_{mt}\Pi_{im} = x_{it} \quad (t = 1, 2, \dots, m.)$$

Her er z -verdiene systemets koeffisienter. De danner en kvadratisk matrise

$$\begin{bmatrix} z_{11} & z_{21} & \dots & z_{m1} \\ z_{12} & z_{22} & \dots & z_{m2} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ z_{1m} & z_{2m} & \dots & z_{mm} \end{bmatrix}$$

og systemet har, ifølge en vel kjent setning om løsning av lineære likningssystemer, en entydig løsning for $\Pi_{i1}, \Pi_{i2}, \dots, \Pi_{im}$ hvis og bare hvis determinanten til matrisen ovenfor er for-

skjellig fra null. (Som en illustrasjon av et sett av m observasjoner som gir entydig løsning kunne vi gi z_{1t} verdien 1 for alle t , slik at Π_{i1} , står for et konstantledd. Videre kunne vi sette $z_{2t}, z_{3t}, \dots, z_{mt}$ alle lik null for $t=1$, og for de etterfølgende observasjoner etter tur gi én variabel verdien 1, mens de øvrige settes lik null. Da ville koeffisientmatrisen til (5.3) ha ett-tall i første kolonne og i hoveddiagonalen, mens de øvrige elementer ville være representert ved nuller. Determinantverdien ville da bli 1, og første likning i (5.3) ville bli $\Pi_{i1} = x_{i1}$, mens de øvrige ville få den enkle form $\Pi_{i1} + \Pi_{ik} = x_{ik}$ for $k = 2, 3, \dots, m$.)

Dersom vi tenker oss - som i tidligere resonneringer - at vi i prinsippet har adgang til et ubegrenset antall observasjoner, så må det for alle t gjelde en ganske bestemt form for restriksjon på den innbyrdes samvariasjon mellom observasjonsrekkene for de eksogene variable for at det ikke skal være mulig å plukke ut m observasjoner til en koeffisientmatrise for (5.3) med determinant forskjellig fra null. Denne restriksjonen har formen

$$(5.4) \quad \begin{array}{l} \text{Det finnes et sett av konstanter} \\ \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m, \text{ ikke alle lik null, slik at} \\ \lambda_1 z_{1t} + \lambda_2 z_{2t} + \dots + \lambda_m z_{mt} = 0, \text{ for alle } t. \end{array}$$

Restriksjonen uttrykker lineær avhengighet mellom de eksogene variable. Hvis (5.4) gjelder, så vil enhver mulig matrise av koeffisienter for systemet (5.3) få lineært avhengige kolonner, og det innebærer at enhver mulig kvadratisk matrise med m^2 elementer har determinant med verdi null, ifl. en kjent setning om determinanter. Omvendt, hvis (5.4) ikke gjelder,

så vil minst én blant de mulige koeffisientmatriser for (5.3) ha determinant forskjellig fra null, og det eksisterer en entydig løsning for $\Pi_{i1}, \Pi_{i2}, \dots, \Pi_{im}$. Konklusjonen for det tilfelle vi behandler, er derfor at den klasse av restriksjoner på variasjonsområdet for de eksogene variable som utelukker identifikasjon av koeffisientene i en redusert form, er fullt ut karakterisert ved at restriksjonene har formen (5.4). Andre former for restriksjoner på variasjonsområdet er uten betydning i denne sammenheng.

Eksempler.

Nokså selvfølgelige eksempler på restriksjoner av formen (5.4) er tilfeller som innebærer lineære definisjonssammenhenger mellom noen av de eksogene variable. Når z_{1t} står for en hjelpevariabel med verdien 1 for alle t , så er disse tilfellene karakterisert ved at $\lambda_1 = 0$, mens de øvrige λ -ene har verdiene $-1, 0$ eller $+1$. I praksis skaper ikke disse tilfellene problemer. Hvis det gjelder en lineær definisjonsrelasjon mellom noen av de eksogene variable, så er - som nevnt tidligere - en av dem overflødige og kan elimineres ved hjelp av restriksjonen.

Det er vanskelig å peke på andre eksempler med særlig aktualitet for praktiske anvendelser. Restriksjoner som innebærer "at en variabel ikke varierer", har formen (5.4), med den tilhørende λ forskjellig fra null, med λ_1 forskjellig fra null og med de øvrige λ -er lik null. Men betingelsen at dette skal gjelde ikke bare for et foreliggende sampel, men for alle t , gjør dette tilfellet uinteressant i praksis.

Like uinteressant for praktiske anvendelser er den mulighet at det for alle t skulle gjelde en eksakt relasjon av strukturell art mellom noen av de eksogene variable, med λ -er som koeffisienter i en slik relasjon.

Med støtte i eksemplene ovenfor kan vi formulere den konklusjon at den reduserte form (koeffisientene i den reduserte form) "i praksis alltid" er identifiserbar(e) i tilfellet med eksakte relasjoner (og ikke-stokastiske eksogene variable). Det forbehold som ligger i formuleringen "i praksis alltid", og som skyldes at restriksjonen (5.4) ikke må gjelde, er av liten betydning i praksis.

Behandlingen i detalj av tilfellet da stokastiske restleddsvariable ikke forekommer i (5.1) - og heller ikke i strukturformen (4.1) - har interesse fordi den klarlegger langt på vei betingelsene for identifikasjon av koeffisientene i den reduserte form også for det tilfellet da relasjonene inneholder stokastiske restledd. Den reduserte form (med restleddsegenskaper som spesifisert foran) er "i praksis alltid" identifiserbar. Forbeholdet er at (5.4) ikke må gjelde. Denne konklusjon følger ved et resonnement tilsvarende det som ble brukt i et forenklet eksempel i avsnitt 2.

Spesifikasjonen (5.1), der $E\epsilon_{it} = 0$ og $E(\epsilon_{it} \cdot \epsilon_{jt}) = \omega_{ij}$ for alle i og j og t , og der $z_{1t}, z_{2t}, \dots, z_{mt}$ antas å være ikke-stokastiske, definerer hver enkelt x_{it} på en slik måte at en kan danne minste kvadraters regresjonsestimatorer basert på likning nr. i for $\Pi_{i1}, \Pi_{i2}, \dots, \Pi_{im}$. For et gitt sampel, $t = 1, 2, \dots, T$, hvor $T > m$, vil det eksistere estimater $\hat{\Pi}_{ik}$ av Π_{ik} dersom en restriksjon av formen (5.4)

ikke gjelder for alle t i samplet. Når estimatorer $\hat{\Pi}_{ik}$ ($i = 1, 2, \dots, n$; $k = 1, 2, \dots, m$) erstatter Π_{ik} i likningene, kan en på vanlig måte beregne restledd $\hat{\varepsilon}_{it}$ ($i = 1, 2, \dots, n$) for alle t i observasjons-samplet. Sampelgjennomsnittene for alle produkter av formen $\hat{\varepsilon}_{it} \cdot \hat{\varepsilon}_{jt}$ danner verdier av estimatorer for ω_{ij} , for alle i og j . Disse estimatorer for Π_{ik} og ω_{ij} , for alle i, j og k , konvergerer i sannsynlighet mot de respektive analogt definerte parametre, forutsatt at (5.4) ikke gjelder for alle t , nå ikke begrenset til et sampel av g i t størrelse T , men der T vokser over alle grenser. Estimatorene er konsistente forutsatt at (5.4) ikke gjelder. Derav følger at parametrene er identifiserbare, jfr. avsnitt 2.

Merk at vi nå drøfter tilfeller da det er spesifisert et vilkårlig antall regresjonslikninger, og ikke bare en enkelt. Hadde vår forutsetning vært at restledd i forskjellige relasjoner var stokastisk uavhengige, slik at ω_{ij} var null for $i \neq j$, ville utvidelsen til n relasjoner åpenbart ikke ha betydd noe vesentlig i denne sammenheng. Hver regresjonslikning kunne ha vært behandlet for seg. Men det er ikke så opplagt at heller ikke den sammenknytning mellom likningene som følger av at noen ω_{ij} er forskjellig fra null, har noen betydning i denne forbindelse.¹⁾ Ser vi imidlertid på spesialtilfellet da eksogene variable ikke forekommer, men hver x_{it} har en konstant forventningsverdi, A_i , avhengig av i , men uavhengig av t , så har vi en situasjon som er karakterisert ved at $(x_{1t}, x_{2t}, \dots, x_{nt})$ er simultant fordelt med konstante marginale forventningsverdier, A_i , og konstante varianser/kovarianser, ω_{ij} , ($i, j = 1, 2, \dots, n$). Det er et vel kjent resultat at sampelgjennomsnittene og sampelvariansene/kovariansene er konsistente estimatorer

1) Vist i Malinvaud's lærebok. Ch. 6, §3.

for de analoge parametrene i den teoretiske fordeling.¹⁾ Vårt resonnement ovenfor innebærer ikke noe mer enn en viss generalisering av dette resultat. Fra regresjonsteorien vet vi at minste kvadraters estimatorene av regresjonskoeffisientene beholder konsistensegenskapene når forutsetningen om ikke-stokastiske eksogene variable erstattes av en forutsetning om at disse er stokastiske, forutsatt at de er fordelt uavhengig av de restleddsvariable. Også estimatorene for varianser og kovarianser av vanlig form, basert på sampelrestleddene, vil være konsistente under begge typer av forutsetninger. Derfor er konklusjonen om identifikasjonsegenskaper uavhengig av hvilken av disse to typer forutsetninger som gjelder for de eksogene variable.²⁾

Alle parametre i den reduserte form er avledet entydig av parametrene i modellens strukturform, jfr. (4.1.a), (4.2.a) og (5.2.a). Men avledningen er ikke slik at "tilbakeregning" - fra parametre i den reduserte form til parametre i strukturformen - alltid er mulig. Hadde det vært tilfelle, ville vår konklusjon om at parametrene i den reduserte form "i praksis alltid" er identifiserbare, uten forbehold ha betydd den samme konklusjon om parametrene i strukturformen. Et viktig spørsmål i denne forbindelse er om vi kan få informasjon fra data om strukturformen utover den informasjon som fullt kjennskap til den reduserte form kan gi. Svaret er nei. For å underbygge det, trenger vi følgende setning:

1) Se f.eks. Cramér (1945), *Mathematical Methods of Statistics*, Ch. 27.3.

2) Når de eksogene variable er stokastiske, gjelder konklusjonen med sannsynlighet lik én.

Under de spesifikasjoner og forutsetninger som er sammenfattet i punktene (i) - (vi) i avsnitt 4 om en økonometrisk modell, og når restriksjonen (5.4) ikke gjelder, så innebærer fullt kjennskap

(5.5) til alle parametre i den reduserte form at alle parametre i sannsynlighetsfordelingen for modellens endogene variable er kjent. Omvendt betyr fullt kjennskap til alle parametre i sannsynlighetsfordelingen for de endogene variable at alle parametre i den reduserte form er kjent.

(Hvis forutsetningen er at de eksogene variable har en sannsynlighetsfordeling, må sannsynlighetsfordelingen for de endogene variable da oppfattes som en betinget fordeling, betinget med hensyn på de eksogene variable.)

Den reduserte form er gitt i (5.1), der alle restledd ε_{it} har forventningsverdier null og varianser/kovarianser ω_{ij} . Den første del av setningen følger da nokså direkte. Siden vi bare har spesifisert fordelingen for ε_{it} ved forventningsverdier og varianser/kovarianser, så er det de samme fordelingsparametrene vi er interessert i for $x_{1t}, x_{2t}, \dots, x_{nt}$. Vi finner lett at de er gitt ved

$$(5.6) \quad E x_{it} = \Pi_{i1} z_{1t} + \Pi_{i2} z_{2t} + \dots + \Pi_{im} z_{mt},$$

$$(5.7) \quad E[(x_{it} - E x_{it})(x_{jt} - E x_{jt})] = E(\varepsilon_{it} \cdot \varepsilon_{jt}) = \omega_{ij}.$$

$$(i, j = 1, 2, \dots, n).$$

For å vise annen del av setningen må vi ta som utgangspunkt at $E x_{it}$ skal være entydig gitt ved (5.6) for ethvert gitt verdsett av $z_{1t}, z_{2t}, \dots, z_{mt}$. Vi må da være gardert mot at dette kan være

oppfylt for flere verdsett av koeffisientene i (5.6). Lar vi to forskjellige verdsett som begge gir en og samme verdi av Ex_{it} for gitte z -verdier, være representert ved $\Pi_{ik}^{(1)}$ og $\Pi_{ik}^{(2)}$, for $k = 1, 2, \dots, m$, så må z -verdiene tilfredsstillte betingelsen

$$\sum_j (\Pi_{ij}^{(1)} - \Pi_{ij}^{(2)}) z_{jt} = 0 \quad \text{for alle } t.$$

Setter vi her $\lambda_j = (\Pi_{ij}^{(1)} - \Pi_{ij}^{(2)})$, så ser vi at denne betingelsen har formen (5.4), som uttrykker lineær avhengighet mellom de z -variable. Vi har imidlertid allerede gardert oss mot at (5.4) skal gjelde. Dermed har vi også utelukket flere enn ett verdsett for koeffisientene $\Pi_{i1}, \Pi_{i2}, \dots, \Pi_{im}$. Annen del av setningen følger da uten videre, jfr. at ε_{it} har samme fordeling som $(x_{it} - Ex_{it})$.

Et sett av stokastiske variable er fullstendig karakterisert ved en simultan sannsynlighetsfordeling for dette sett av variable. Har vi fullt kjennskap til fordelingen, så vet vi alt som kan vites. Dermed følger det av setningen ovenfor at fullt kjennskap til den reduserte form omfatter all informasjon om sannsynlighetsfordelingen til de endogene variable. Hvis data gir oss full informasjon om den reduserte form, så har vi all informasjon som data kan gi om modellen, og derfor også om relasjonene på strukturform.

Betydningen av denne konklusjon i forbindelse med spørsmålet om **s t r u k t u r r e l a s j o n e n e** er identifiserbare ligger i følgende: Hvis en a priori ukjent parameter i en strukturrelasjon kan avledes entydig fra parametrene i den reduserte form, så er denne strukturparameter identifiserbar. Hvis alle a priori ukjente parametre i en strukturrelasjon kan avledes entydig fra parametrene i den reduserte form, så er **r e l a s j o n e n** identifiserbar. (Vi har da ikke uttrykkelig presisert det - nokså hypotetiske - forbehold om identifiserbarhet for den reduserte form som ligger i at (5.4) ikke må gjelde.)

Dette resonnement fører til at den rent algebraiske sammenheng mellom parametrene i strukturformen og parametrene i den reduserte form kan tas som utgangspunkt for utledning av kriterier for identifiserbare parametre i strukturrelasjoner. Det er ikke nødvendig å ha dette utgangspunkt, men det er vanlig, og det gir kriteriene i en form som gjør det lett å bruke dem i praksis.

Ved å trekke på setninger fra den lineære algebra kan utledningen av kriteriene gjøres meget kompakt. Men til dels er det bare bruk for nokså spesielle tilfeller av mer generelle setninger. Isteden for å utvikle disse generelle setningene, eller å forutsette at de er kjent, skal vi mer direkte ta for oss de spesialtilfellene det blir bruk for, og i noen grad ty til eksempler for å illustrere dem.

Foruten de to hovedformene for en modell, strukturformen og den reduserte form, vil vi også gjøre bruk av "en mellomform", der en av likningene er uttrykt på strukturform, mens de øvrige (n-1) likninger er på redusert form. Med første likning på strukturform får vi da systemet, jfr. (4.1) og (4.2),

$$\begin{aligned}
 \beta_{11}x_1 + \beta_{12}x_2 + \dots + \beta_{1n}x_n &= -\left(\sum_{k=1}^m \gamma_{1k}z_k + u_1\right) \\
 x_2 &= \sum_{k=1}^m \pi_{2k}z_k + \varepsilon_2 \\
 &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
 &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
 x_n &= \sum_{k=1}^m \pi_{nk}z_k + \varepsilon_n
 \end{aligned}
 \tag{5.8}$$

For den første likning, strukturlikningen, vil det gjelde en normaliseringsregel (f.eks. at $\beta_{11} = 1$; i så fall blir likningssystemets determinant lik 1). I alminnelighet vil det foreligge nullrestriksjoner for noen av koeffisientene i første likning.

Systemet er slik at innsetting av de (n-1) siste

likningene i den første likningen transformerer denne til redusert form-likning. Vi skal referere til denne "blandede form" som den $(n-1)$ -reduserte form tilordnet strukturlikning nr. 1. Alle strukturlikninger kan selvsagt tilordnes slike $(n-1)$ -reduserte former. Vi kan alltid innrette oss slik at den likning som behandles, opptrer som første likning; i så fall er den kortere betegnelsen "den $(n-1)$ reduserte form" dekkende.

6. Identifikasjon av struktureljasjoner: Et eksempel med tre relasjonjer.

Vi skal gjennomgå i detalj et eksempel som gir muligheter for diskusjon av en del varianter, men som likevel er enkelt nok til at identifikasjonsegenskapene ved en struktureljasjon uten særlig bryderi kan utledes direkte ved vanlig algebra. Eksemplet har 3 endogene variable og 3 struktureljasjoner (som danner et komplett system). Som hovedvariant skal vi bruke følgende form:

$$(6.1) \quad x_1 + \beta_{12}x_2 + \beta_{13}x_3 + \gamma_{11}z_1 + u_1 = 0$$

$$(6.2) \quad \beta_{21}x_1 + x_2 + \gamma_{21}z_1 + u_2 = 0$$

$$(6.3) \quad x_3 + \gamma_{31}z_1 + \gamma_{32}z_2 + \gamma_{33}z_3 + \gamma_{34}z_4 + u_3 = 0$$

Det er her tatt med 4 eksogene variable. Disse forutsettes å være ikke-stokastiske; en av dem, z_1 , reserveres for en hjelpevariabel som skal ha verdien 1 i alle observasjonjer, for å ta vare på at likningene inneholder et konstantledd. Vi utelater markering av observasjonsnummer for de variable, når dette ikke er strengt nødvendig. Som varianter skal vi la flere eksogene variable inngå i de to første likningene.

Den økonomiske tolking av denne modellen kunne være at (6.1) står for en etterspørselsrelasjon og (6.2) for en tilbudsrelasjon i et varemarked, der det forutsettes å være likhet mellom etterspurt og tilbudt kvantum av vedkommende vare. F.eks. kunne da x_1 stå for omsatt kvantum, x_2 for en prisvariabel og x_3 for en inntektsvariabel. Analogt med vanlige lærebokseksempler kunne (6.3) stå for en multipliktorlikning for inntektsdannelsen, med en passende tolking av z_2 , z_3 og z_4 som eksogene variable. Siden den konkrete tolking er uten betydning for resonnementet, er det unødvendig å gå i detalj om relasjonenes økonomisk-teoretiske innhold.

Spesifikasjonene i (6.1)-(6.3) innebærer at koeffisientene i hver likning er normalisert, og at det er innført en del nullrestriksjoner for koeffisienter. Normaliseringen er foretatt ved å gi x_i koeffisienten 1 i likning nr. i , for $i = 1, 2, 3$; andre valg av normalisering er mulige, og da likeverdige. Nullrestriksjonene skulle ikke trenge særlige kommentarer.

Den stokastiske hypotese om de restleddsvariable lar vi være at (u_{1t}, u_{2t}, u_{3t}) er identisk og uavhengig fordelt for alle t , og videre at $E u_{it} = 0$ for alle z_{kt} ($i = 1, 2, 3$; $k = 1, 2, 3, 4$), og at $E(u_{it} \cdot u_{jt}) = \sigma_{ij}$ ($i, j = 1, 2, 3$). Det er altså ingen a priori restriksjoner på elementene σ_{ij} i matrisen Σ .

Den reduserte form av dette systemet er representert ved

$$(6.4) \quad x_1 = \Pi_{11}z_1 + \Pi_{12}z_2 + \Pi_{13}z_3 + \Pi_{14}z_4 + \varepsilon_1$$

$$(6.5) \quad x_2 = \Pi_{21}z_1 + \Pi_{22}z_2 + \Pi_{23}z_3 + \Pi_{24}z_4 + \varepsilon_2$$

$$(6.6) \quad x_3 = \Pi_{31}z_1 + \Pi_{32}z_2 + \Pi_{33}z_3 + \Pi_{34}z_4 + \varepsilon_3$$

der koeffisientene Π_{ij} er avledet av strukturlikningens koeffisienter. Sammenhengen er gitt ved følgende oppstilling:

Matrisen Π .

i	Π_{i1}	Π_{i2}	Π_{i3}	Π_{i4}
1	$\frac{-\gamma_{11} + \beta_{12}\gamma_{21} + \beta_{13}\gamma_{31}}{1 - \beta_{21}\beta_{12}}$	$\frac{\beta_{13}\gamma_{32}}{1 - \beta_{21}\beta_{12}}$	$\frac{\beta_{13}\gamma_{33}}{1 - \beta_{21}\beta_{12}}$	$\frac{\beta_{13}\gamma_{34}}{1 - \beta_{21}\beta_{12}}$
2	$\frac{\beta_{21}\gamma_{11} - \gamma_{21} - \beta_{21}\beta_{13}\gamma_{31}}{1 - \beta_{21}\beta_{12}}$	$\frac{-\beta_{21}\beta_{13}\gamma_{32}}{1 - \beta_{21}\beta_{12}}$	$\frac{-\beta_{21}\beta_{13}\gamma_{33}}{1 - \beta_{21}\beta_{12}}$	$\frac{-\beta_{21}\beta_{13}\gamma_{34}}{1 - \beta_{21}\beta_{12}}$
3	$-\gamma_{31}$	$-\gamma_{32}$	$-\gamma_{33}$	$-\gamma_{34}$

Restleddene i den reduserte form følger av (4.3) for $n=3$. Vi har

$$(6.7) \quad \varepsilon_1 = -(\beta_{11}^{-1}u_1 + \beta_{12}^{-1}u_2 + \beta_{13}^{-1}u_3)$$

$$(6.8) \quad \varepsilon_2 = -(\beta_{21}^{-1}u_1 + \beta_{22}^{-1}u_2 + \beta_{23}^{-1}u_3)$$

$$(6.9) \quad \varepsilon_3 = -(\beta_{31}^{-1}u_1 + \beta_{32}^{-1}u_2 + \beta_{33}^{-1}u_3)$$

der β_{ij}^{-1} er elementene i B^{-1} , jfr. oppstillingen neste side.

Koeffisientene for de endogene variable i (6.1)-(6.3) er

$$(6.10) \quad B = \begin{bmatrix} 1 & \beta_{12} & \beta_{13} \\ \beta_{21} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

som har determinant $|B| = (1 - \beta_{21}\beta_{12})$; denne determinanten må vi kunne anta har en verdi forskjellig fra null,

dersom β_{12} og β_{21} tolkes som koeffisienter i henholdsvis en etter-spørselsrelasjon og en tilbudsrelasjon. (Uansett den konkrete tolking ville relasjonene være lineært avhengige hvis produktet $\beta_{21} \cdot \beta_{12}$ akkurat skulle være lik +1.) Koeffisientene β_{ij}^{-1} , som generelt finnes av likningssystemet

$$\sum_{j=1}^n \beta_{ij} \beta_{jk}^{-1} = \delta_{ik}; \quad \begin{array}{l} i = 1, 2, \dots, n \\ k = 1, 2, \dots, n \end{array}$$

(der $\delta_{ik} = 1$ for $i = k$, og $\delta_{ik} = 0$ for $i \neq k$) er i dette tilfelle gitt ved følgende oppstilling:

Matrisen B^{-1}

i	β_{i1}^{-1}	β_{i2}^{-1}	β_{i3}^{-1}
1	$\frac{1}{1 - \beta_{21}\beta_{12}}$	$\frac{-\beta_{12}}{1 - \beta_{21}\beta_{12}}$	$\frac{-\beta_{13}}{1 - \beta_{21}\beta_{12}}$
2	$\frac{-\beta_{21}}{1 - \beta_{21}\beta_{12}}$	$\frac{1}{1 - \beta_{21}\beta_{12}}$	$\frac{\beta_{21}\beta_{13}}{1 - \beta_{21}\beta_{12}}$
3	0	0	1

Systemet (6.1)-(6.3) har i alt $3 \cdot (3 + 4) = 21$ strukturkoeffisienter, hvorav 3 er normalisert til å ha verdien 1 og $(3 + 4 + 2) = 9$ er a priori gitt verdien 0. Det er således 12 strukturkoeffisienter som har a priori kjente verdier, og 9 er a priori ukjente. Hvis disse 9 koeffisientene kan bestemmes entydig, uttrykt ved parametrene i den reduserte form, så er konklusjonen at (6.1), (6.2) og (6.3) er

identifiserbare. Mer dekkende, "i praksis identifiserbare"; vi lar det heretter være underforstått at vi kan se bort fra at (5.4) gjelder). Grunlaget for å undersøke dette har vi i oppstillingen ovenfor, som uttrykker elementene i matrisen Π som funksjoner av β -koeffisientene og γ -koeffisientene. Hver av rutene i oppstillingen gir en likning, i alt 12 likninger. Vi må undersøke om disse likningene gir tilstrekkelig informasjon til å bestemme de 9 a priori ukjente β - og γ -koeffisientene, uttrykt ved Π -koeffisientene. Siden vi har 12 likninger, men har 9 ukjente, er det klart at ikke alle likningene kan være uavhengige.

Det er uten videre klart at relasjon (6.3), som har sammenfallende strukturform og redusert form, er identifiserbar. De fire likningene som uttrykker dette eksplisitt, kan direkte avleses fra tredje linje i matrisen Π ovenfor.

$$\gamma_{3k} = -\Pi_{3k} ; \quad k = 1, 2, 3, 4.$$

Ved inspeksjon av de 12 likningene går det også an å lete seg fram til (kontroller!) at

$$\beta_{21} = -\frac{\Pi_{22}}{\Pi_{12}} = \frac{-\Pi_{23}}{\Pi_{13}} = \frac{-\Pi_{24}}{\Pi_{14}}$$

$$\Pi_{11}\beta_{21} + \gamma_{21} = -\Pi_{21}$$

som innebærer at vi har fire likninger, men bare to av dem uavhengige, til å bestemme de to ukjente strukturkoeffisientene i relasjon (6.2). Forutsatt at Π_{12} , Π_{13} og Π_{14} alle er forskjellig fra null, er det likegyldig hvilken av de tre likningene i første linje som brukes, sammen med likningen i annen linje, for å bestemme β_{21} og γ_{21} ; løsningen er entydig, - vi foretar jo bare en "tilbakeregning". Relasjon (6.2)

1) Merk at $\Pi_{1k} \neq 0$ dersom $\beta_{13} \neq 0$ og $\gamma_{3k} \neq 0$, $k = 2, 3, 4$; jfr. oppstillingen foran.

er identifiserbar, dersom minst en av koeffisientene Π_{12} , Π_{13} , Π_{14} er forskjellig fra null.

På tilsvarende måte kunne vi også lete oss fram til betingelsen for at relasjon (6.1) er identifiserbar under de spesifiserte forutsetninger. Men vi trenger åpenbart et systematisk opplegg, og det bør være anvendbart også for større systemer. Enklest kan vi uttrykke sammenhengen mellom struktur- og redusert form-koeffisientene ved å sette inn x_1 , x_2 og x_3 uttrykt ved (6.4) - (6.6) i strukturrelasjonene (6.1) - (6.3). Da får vi 3 likninger der x_1 , x_2 og x_3 er eliminert, og hvor z -ene, u -ene og ε -ene forekommer med visse koeffisienter. Her kunne vi eliminere også ε_1 , ε_2 , og ε_3 ved hjelp av (6.7) - (6.9), men det forenkler formlene om vi isteden eliminerer u_1 , u_2 og u_3 , og beholder ε_1 , ε_2 og ε_3 . Resultatet blir 3 likninger, der bare z -ene forekommer (idet ε_1 , ε_2 og ε_3 faller bort). Disse likningene må gjelde for alle verdier av z_1 , z_2 , z_3 og z_4 , siden dette er tilfellet for (6.1) - (6.3) og for (6.4) - (6.6). Dette kravet, som er oppfylt hvis og bare hvis koeffisientene for hver z_k ($k = 1, 2, 3, 4$) i disse likningene er lik null, gir oss eksplisitt de sammenhenger vi søker mellom strukturkoeffisienter og redusert form-koeffisienter.

Det er bare bruk for nokså triviell algebra for å etablere disse sammenhengene. Vi gjennomfører likevel utledningene for å ha en illustrasjon i vanlig algebra av formler som senere skal presenteres i matrisealgebra.

Vi vil få bruk for den inverse form av (6.7) - (6.9) for å uttrykke u_i som funksjon av ε_1 , ε_2 og ε_3 , for $i = 1, 2, 3$. Vi har

$$(6.11) \quad u_1 = -(\varepsilon_1 + \beta_{12}\varepsilon_2 + \beta_{13}\varepsilon_3)$$

$$(6.12) \quad u_2 = -(\beta_{21}\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$$

$$(6.13) \quad u_3 = -(\varepsilon_3),$$

dvs. koeffisientene er, bortsett fra fortegn, elementene i matrisen B gitt i (6.10). Riktigheten av dette følger av at sammenhengen mellom u-ene og ε -ene er en-entydig, slik at en inversjon av (6.7) - (6.9), der koeffisientene er $(-\beta_{ij}^{-1})$, bringer tilbake koeffisientene $(-\beta_{ij})$.

Innsettingen i (6.1) av x_1 , x_2 og x_3 uttrykt ved (6.4) - (6.6) og av u_1 uttrykt ved (6.11) gir likningen

$$\begin{aligned}
 (6.14) \quad & 1(\Pi_{11}z_1 + \Pi_{12}z_2 + \Pi_{13}z_3 + \Pi_{14}z_4) + \varepsilon_1 \\
 & + \beta_{12}(\Pi_{21}z_1 + \Pi_{22}z_2 + \Pi_{23}z_3 + \Pi_{24}z_4) + \beta_{12}\varepsilon_2 \\
 & + \beta_{13}(\Pi_{31}z_1 + \Pi_{32}z_2 + \Pi_{33}z_3 + \Pi_{34}z_4) + \beta_{13}\varepsilon_3 \\
 & + \gamma_{11}z_1 - \varepsilon_1 - \beta_{12}\varepsilon_2 - \beta_{13}\varepsilon_3 = 0.
 \end{aligned}$$

På helt tilsvarende måte får vi ved innsetting i (6.2)

$$\begin{aligned}
 (6.15) \quad & \beta_{21}(\Pi_{11}z_1 + \Pi_{12}z_2 + \Pi_{13}z_3 + \Pi_{14}z_4) + \beta_{21}\varepsilon_1 \\
 & + 1(\Pi_{21}z_1 + \Pi_{22}z_2 + \Pi_{23}z_3 + \Pi_{24}z_4) + \varepsilon_2 \\
 & + \gamma_{21}z_1 - \beta_{21}\varepsilon_1 - \varepsilon_2 = 0,
 \end{aligned}$$

og ved innsetting i (6.3)

$$\begin{aligned}
 (6.16) \quad & \Pi_{31}z_1 + \Pi_{32}z_2 + \Pi_{33}z_3 + \Pi_{34}z_4 + \varepsilon_3 \\
 & + \gamma_{31}z_1 + \gamma_{32}z_2 + \gamma_{33}z_3 + \gamma_{34}z_4 - \varepsilon_3 = 0.
 \end{aligned}$$

For at (6.14) - (6.16) skal være oppfylt for alle verdier av z_1 , z_2 , z_3 og z_4 , ser vi lett at følgende tre sett av koeffisientbetingelser må være oppfylt:

$$\begin{aligned}
 & \Pi_{21}\beta_{12} + \Pi_{31}\beta_{13} + \gamma_{11} = -\Pi_{11} \\
 & \Pi_{22}\beta_{12} + \Pi_{32}\beta_{13} = -\Pi_{12} \\
 (6.17) \quad & \Pi_{23}\beta_{12} + \Pi_{33}\beta_{13} = -\Pi_{13} \\
 & \Pi_{24}\beta_{12} + \Pi_{34}\beta_{13} = -\Pi_{14}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \Pi_{11}\beta_{21} + \gamma_{21} = -\Pi_{21} \\
 (6.18) \quad & \Pi_{12}\beta_{21} = -\Pi_{22} \\
 & \Pi_{13}\beta_{21} = -\Pi_{23} \\
 & \Pi_{14}\beta_{21} = -\Pi_{24}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \gamma_{31} = -\Pi_{31} \\
 (6.19) \quad & \gamma_{32} = -\Pi_{32} \\
 & \gamma_{33} = -\Pi_{33} \\
 & \gamma_{34} = -\Pi_{34}.
 \end{aligned}$$

Resultatene i (6.18) og (6.19) er nevnt tidligere. Likningssettet (6.19) er uinteressant som følge av at strukturformens tredje likning og den reduserte forms tredje likning er sammenfallende, bortsett fra koeffisientbetegnelse.

Likningssettet (6.18) forteller oss at β_{21} vil være bestemt av koeffisientene i den reduserte form hvis, og bare hvis, minst ett av elementene i vektoren $(\Pi_{12} \Pi_{13} \Pi_{14})$ er forskjellig fra null. Dersom alle elementene i denne vektoren er forskjellige fra null, gir de tre siste likningene i settet samme resultat for β_{21} (likningene er ikke uavhengige). Hvis β_{21} kan bestemmes, så vil innsetting i den første likning alltid gi en løsning for γ_{21} . Vi har altså følgende konklusjon: Strukturrelasjon nr. 2 er identifiserbar på grunnlag av (6.18) under de spesifiserte forut-

setninger hvis, og bare hvis, minst ett av elementene i vektoren $(\Pi_{12} \Pi_{13} \Pi_{14})$ er forskjellig fra null. Nå er imidlertid Π -koeffisientene avledede størrelser, og vi er derfor interessert i å få betingelsen uttrykt ved strukturkoeffisientene istedenfor ved redusert form-koeffisientene. Det går fram av første linje i matrisen Π foran at Π_{1k} , for $k = 2, 3, 4$, har verdien null hvis, og bare hvis, noen av strukturkoeffisientene som ikke er pålagt nullrestriksjon, også er null. Men dersom koeffisienter som ikke er pålagt nullrestriksjoner, antas å ha en verdi som ikke eksakt er null, har vi den ubetingede konklusjon at strukturrelasjon nr. 2 er identifiserbar.

To av de tre siste likningene i likningssettet (6.17) bestemmer simultant β_{12} og β_{13} hvis, og bare hvis, minst en av determinantene

$$\begin{vmatrix} \Pi_{22} & \Pi_{32} \\ \Pi_{23} & \Pi_{33} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \Pi_{22} & \Pi_{32} \\ \Pi_{24} & \Pi_{34} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \Pi_{23} & \Pi_{33} \\ \Pi_{24} & \Pi_{34} \end{vmatrix}$$

er forskjellig fra null. Den første determinanten har referanse til at likning nr. 2 og 3 i (6.17) brukes, den andre determinanten til at likning nr. 2 og 4 brukes og den tredje determinanten til at likning nr. 3 og 4 brukes; flere muligheter er det ikke. Dersom de tre determinantene alle er forskjellig fra null, gir de tre kombinasjonene av to likninger samme resultat for β_{12} og for β_{13} . Hvis β_{12} og β_{13} kan bestemmes, så vil innsetting i settets første likning alltid gi en løsning for γ_{11} . Konklusjonen er at koeffisientene i strukturrelasjon nr. 1 er identifiserbare på grunnlag av (6.17) hvis, og bare hvis, minst en av determinantene som er gitt ovenfor, har en verdi forskjellig fra null. Igjen kan vi bruke spesifikasjonene i matrisen Π foran til å få betingelsen uttrykt ved strukturkoeffisientene istedenfor ved redusert form-koeffisientene. Ved hjelp av elementer fra matrisens 2. og 3. linje kan vi

lett finne at alle de tre determinantene ovenfor har verdien null uansett strukturkoeffisientenes numeriske verdi. Dermed har vi den konklusjon at strukturrelasjon nr. 1 ikke er identifiserbar under de spesifiserte forutsetninger.

Konklusjonene om hvilke av de tre relasjonene som er identifiserbare bygger ikke på all informasjon om den reduserte form, men bare på den informasjon som Π -koeffisientene gir. Den ytterligere informasjon vi har, er inneholdt i parametrene ω_{ij} i kovariansmatrisen Ω . Disse er entydig knyttet til parametrene σ_{ij} i kovariansmatrisen Σ ved relasjoner av formen (5.2), der de inverse β -koeffisientene inngår. Det følger av (6.11) - (6.13) at σ_{ij} , for i og j lik 1, 2, 3, kan uttrykkes ved ω -parametrene og β -koeffisientene på følgende måte:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{11} &= \omega_{11} + 2\beta_{12}\omega_{12} + 2\beta_{13}\omega_{13} \\
 &\quad + (\beta_{12})^2\omega_{22} + 2\beta_{12}\beta_{13}\omega_{23} + (\beta_{13})^2\omega_{33} \\
 \sigma_{12} &= \beta_{21}\omega_{11} + (1 + \beta_{21}\beta_{12})\omega_{12} + \beta_{21}\beta_{13}\omega_{13} \\
 &\quad + \beta_{12}\omega_{22} + \beta_{13}\omega_{23} \\
 (6.20) \quad \sigma_{13} &= \omega_{13} + \beta_{12}\omega_{23} + \beta_{13}\omega_{33} \\
 \sigma_{22} &= (\beta_{21})^2\omega_{11} + 2\beta_{21}\omega_{12} + \omega_{22} \\
 \sigma_{23} &= \beta_{21}\omega_{13} + \omega_{23} \\
 \sigma_{33} &= \omega_{33}
 \end{aligned}$$

Av dette likningssystemet kan vi umiddelbart se at hver likning gir grunnlag for å identifisere én av σ -parametrene hvis, og bare hvis, de β -parametrene som inngår i vedkommende likning, er identifiserbare på grunnlag av informasjon fra (6.17) - (6.19). Tallet på likninger i (6.20) er det samme som tallet på (forskjellige)

σ -parametre. Så lenge, som i vårt eksempel, ingen av disse parametrene er pålagt nullrestriksjoner (eller andre a priori restriksjoner) så gir (6.20) ikke noe overskudd av informasjon som kan bidra til å identifisere noen av β -koeffisientene (eller γ -koeffisientene). Derfor bygger våre konklusjoner ovenfor om identifiserbarhet av strukturkoeffisientene i de tre relasjoner på grunnlag av (6.17) - (6.19) på all relevant informasjon om dem fra den reduserte form.

Annerledes stiller det seg, dersom noen av σ -parametrene er pålagt a priori restriksjoner. Da ville likningssystemet (6.20) innebære visse restriksjoner på β -koeffisientene. Om f.eks. σ_{23} a priori var satt lik null, ville β_{21} , være bestemt ved at $\beta_{21}\omega_{13} + \omega_{23} = 0$, ved nest siste likning i (6.20). Nå gir ikke dette noen tilleggsopplysning om identifiserbarhet, siden β_{21} , allerede er vist å være identifiserbar selv uten en slik forutsetning. Men om f.eks. σ_{13} a priori er satt lik null, uttrykker tredje likning i (6.20) at

$$\omega_{23}\beta_{12} + \omega_{33}\beta_{13} = -\omega_{13},$$

og sammen med en av de tre siste likninger i (6.17), har vi da to likninger til å bestemme β_{12} og β_{13} . Hvilken av de tre likninger i (6.17) som brukes, er likegyldig i vårt eksempel, da de allerede er påvist å være lineært avhengige. Om vi f.eks. velger likning nr. 3 i (6.17), vil systemets determinant være

$$\begin{vmatrix} \omega_{23} & \omega_{33} \\ \Pi_{23} & \Pi_{33} \end{vmatrix} = \omega_{23}\Pi_{33} - \omega_{33}\Pi_{23}.$$

Det ville være et høyst spesielt tilfelle, som vi kan se bort fra, om vi på et a priori grunnlag kunne si at denne determinanten hadde

den eksakte verdi null. Derfor har vi den konklusjon at en tilleggsforutsetning om at σ_{13} er lik null, ville føre til at også den første strukturrelasjonen var identifiserbar.

Resonnementet ovenfor illustrerer at det er hensiktsmessig, når identifikasjonegenskaper behandles, å sondre mellom tilfeller da parametrene i Σ -matrisen ikke er pålagt noen a priori restriksjoner, og tilfeller da slike restriksjoner forekommer. I de først nevnte tilfeller behøver vi ikke ta hensyn til relasjoner av formen (6.20) for å undersøke om strukturkoeffisientene er identifiserbare; i de sist nevnte tilfellene gir (6.20) viktig informasjon, ikke bare om σ -parametrene, men også om β -koeffisientene.

De grunnleggende formler (6.17), (6.18) og (6.19) får en ryddigere form dersom de skrives ut med fullt sett av strukturkoeffisienter, uten hensyn til at noen av dem er pålagt restriksjoner (ved normalisering og nullrestriksjoner). De kan da sammenfattes i likningssystemet

$$\begin{aligned}
 & \Pi_{11}\beta_{i1} + \Pi_{21}\beta_{i2} + \Pi_{31}\beta_{i3} + \gamma_{i1} & = 0 \\
 & \Pi_{12}\beta_{i1} + \Pi_{22}\beta_{i2} + \Pi_{32}\beta_{i3} + \gamma_{i2} & = 0 \\
 & \Pi_{13}\beta_{i1} + \Pi_{23}\beta_{i2} + \Pi_{33}\beta_{i3} + \gamma_{i3} & = 0 \\
 & \Pi_{14}\beta_{i1} + \Pi_{24}\beta_{i2} + \Pi_{34}\beta_{i3} + \gamma_{i4} & = 0
 \end{aligned}
 \tag{6.21}$$

der fotskriften i markerer at strukturkoeffisientene er fra strukturlikning nr. i ($i = 1, 2, 3$). For gitt i er dette et system av fire lineære likninger i syv ukjente størrelser β_{i1} , β_{i2} , β_{i3} , γ_{i1} , γ_{i2} , γ_{i3} og γ_{i4} (når vi ser bort fra normaliseringsregel og nullrestriksjoner for strukturkoeffisienter).

Vi merker oss noen egenskaper ved (6.21) som lett kan sees å ha gyldighet også for modeller med flere likninger og flere variable.

(i) Tallet på likninger i (6.21) er bestemt av π og er det samme som π - tallet på eksogene variable i modellen.

(ii) Tallet på kjente og ukjente strukturcoeffisienter i (6.21) er det samme for alle i , og lik tallet på endogene plus eksogene variable i modellen.

(iii) En nødvendig, men ikke tilstrekkelig betingelse for å bestemme entydig alle a priori ukjente strukturcoeffisienter i likning nr. i ved hjelp av (6.21) er at tallet på ukjente coeffisienter i likning nr. i ikke er større enn tallet på likninger i (6.21) (for gitt i). (Siden Π -coeffisientene er avledet av β -coeffisientene og γ -coeffisientene, kan ikke tilfellet med flere likninger enn ukjente føre til et selvmotsigende system; de likninger vi har "for mange", er lineært avhengige av de øvrige).

(iv) En nødvendig og tilstrekkelig betingelse for å bestemme entydig alle ukjente strukturcoeffisienter i likning nr. i ved hjelp av (6.21) er at dette systemet inneholder akkurat så mange lineært uavhengige likninger som tallet på a priori ukjente coeffisienter (i likning nr. i).

(v) I tilfeller da alle a priori kjente coeffisienter i strukturlikning nr. i er bestemt ved nullrestriksjoner pluss en normaliseringsregel for en av coeffisientene, kan den nødvendige betingelse i punkt (iii) uttrykkes ved opp tellinger av ulike typer av variable som forekommer (eller ikke forekommer) i likning nr. i og i modellen som helhet. (En nullrestriksjon innebærer at en variabel ikke forekommer i vedkommende likning). Av (ii) og (i) følger at differensen mellom tallet på (kjente og ukjente) struktur-

disposisjon for å bestemme de ukjente, er lik tallet på endogene variable i modellen. Derfor kan den nødvendige betingelse i punkt (iii) nå formuleres på følgende måte: Tallet på a priori kjente koeffisienter i en likning må minst være lik tallet på endogene variable i modellen. Nå er en av koeffisientene bestemt av en normaliseringsregel, mens de øvrige forutsettes gitt ved nullrestriksjoner ("utelatte variable"). Derfor er en likeverdig, og vanlig, formulering denne: Tallet på utelatte variable i en likning må minimalt være $e n m i n d r e e n n$ tallet på endogene variable i modellen. Dette er en nødvendig betingelse for identifiserbarhet av en strukturell relasjon, når det ikke foreligger noen nullrestriksjoner (eller andre a priori restriksjoner) på parametrene i Σ -matrisen.

Telleregelen i punkt (v) er grei å anvende. Hvis den betingelse den uttrykker, ikke er oppfylt, har vi den endelige konklusjon at vedkommende relasjon ikke er identifiserbar. Hvis betingelsen er oppfylt, jfr. diskusjonen av (6.1), melder spørsmålet seg om hvor mange av likningene i (6.21) som er lineært uavhengige, jfr. punkt (iv) - og tidligere drøftelser i tilknytning til (6.17) og (6.18).

Vi skal gjøre bruk av "den (n-1)-reduuerte form", innført i avsnitt 5, for å komme fram til en grei regel om nødvendige og tilstrekkelige betingelser på Π -koeffisientene for identifiserbarhet av en strukturell relasjon. Som et neste skritt, og som i drøftelsene foran, skal disse betingelsene omformes til betingelser på β -koeffisientene og γ -koeffisientene. De (n-1)-reduuerte former tilordnet hver av de to første strukturlikningene blir, jfr. (5.8),

$$(6.22) \left\{ \begin{array}{l} x_1 + \beta_{12}x_2 + \beta_{13}x_3 = -\gamma_{11}z_1 \quad - u_1 \\ x_2 = \Pi_{21}z_1 + \Pi_{22}z_2 + \Pi_{23}z_3 + \Pi_{24}z_4 + \varepsilon_2 \\ x_3 = \Pi_{31}z_1 + \Pi_{32}z_2 + \Pi_{33}z_3 + \Pi_{34}z_4 + \varepsilon_3. \end{array} \right.$$

$$(6.23) \left\{ \begin{array}{l} x_1 = \Pi_{11}z_1 + \Pi_{12}z_2 + \Pi_{13}z_3 + \Pi_{14}z_4 + \varepsilon_1 \\ \beta_{21}x_1 + x_2 = -\gamma_{21}z_1 \quad - u_2 \\ x_3 = \Pi_{31}z_1 + \Pi_{32}z_2 + \Pi_{33}z_3 + \Pi_{34}z_4 + \varepsilon_3 \end{array} \right.$$

(Slik eksemplet er utformet er det uten interesse å føre opp den (n-1)-reduuerte form tilordnet strukturlikning nr. 3). Fra (6.22) henter vi nå fram koeffisientene til de variable som ikke forekommer i den første likningen (som er den første strukturlikningen), altså koeffisientene til z_2 , z_3 og z_4 . De sammenstilles i matrisen

$$(6.24) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \Pi_{22} & \Pi_{23} & \Pi_{24} \\ \Pi_{32} & \Pi_{33} & \Pi_{34} \end{bmatrix}$$

Vi ser at (6.24) inneholder, foruten en linje med bare nuller, nettopp de Π -koeffisientene som var avgjørende for identifikasjonsegenskapene til første strukturlikning, jfr. drøftingen foran i tilknytning til de tre siste likningene i (6.17). Vi fant at disse likningene gav entydige løsninger for β_{12} og β_{13} (mens den første likningen i (6.17) gav løsningen for γ_{11}) hvis, og bare hvis, minst én av de tre to-radede determinantene

$$\begin{vmatrix} \Pi_{22} & \Pi_{32} \\ \Pi_{23} & \Pi_{33} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \Pi_{22} & \Pi_{32} \\ \Pi_{24} & \Pi_{34} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \Pi_{23} & \Pi_{33} \\ \Pi_{24} & \Pi_{34} \end{vmatrix},$$

hadde en verdi forskjellig fra null. Dette kan nå uttrykkes som en betingelse på matrisen (6.24): Den må ha rang lik 2 (en mindre enn tallet på strukturlikninger i systemet)¹⁾. I vårt eksempel er denne betingelsen ikke oppfylt. Rang er 1

Uten å gå veien om en nokså langtekkelig algebra, jfr. (6.14) og (6.17), kan vi, som eksemplet viser, finne fram til en nødvendig og tilstrekkelig betingelse for identifiserbarhet ved direkte å ta utgangspunkt i den (n-1)-reduserte form for vedkommende strukturlikning, og ved å undersøke rangen til en matrise som er bestemt ved en grei regel. Vi merker oss at denne matrisen må ha rang mindre enn tallet på strukturlikninger (tallet på endogene variable) i modellen, siden den alltid har bare nuller i første linje. Hvis, og bare hvis, den har rang en mindre enn tallet på strukturlikninger (tallet på endogene variable) i modellen, er vedkommende strukturlikning identifiserbar (når det ikke forekommer restriksjoner på noen parametre i Σ -matrisen).

Behandler vi 2. strukturlikning på en tilsvarende måte, med utgangspunkt i (6.23), må vi hente fram koeffisientene til x_3 , z_2 , z_3 og z_4 , som er de variable som ikke forekommer i 2. strukturlikning. Disse koeffisientene danner (når x_3 tenkes overflyttet til høyresiden av likningene) matrisen

$$(6.25) \quad \begin{bmatrix} 0 & \Pi_{12} & \Pi_{13} & \Pi_{14} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & \Pi_{32} & \Pi_{33} & \Pi_{34} \end{bmatrix} .$$

1) En matrise har rang r hvis den inneholder minst en r-radet determinant med verdi forskjellig fra null, mens alle determinanter med radtall større enn r, som matrisen måtte inneholde, har verdien null. Matrisen har rang null, hvis alle dens elementer er null.

Strukturlikning nr. 2 er identifiserbar hvis, og bare hvis, denne matrisen har rang 2. Som vi allerede har undersøkt har f.eks. determinanten

$$\begin{vmatrix} 0 & \Pi_{12} \\ -1 & \Pi_{32} \end{vmatrix} = \Pi_{12}$$

en verdi forskjellig fra null.¹⁾

Grunnen til at den (n-1)-reduserte form "ordner algebraen for oss", er det forholdsvis lett å etterspore. Om vi f.eks. tar for oss likningssystemet (6.22), som er den (n-1)-reduserte form tilordnet strukturlikning nr. 1, så vil vi ved innsetting i første likning av x_2 og x_3 , uttrykt ved annen og tredje likning, umiddelbart få den reduserte form (6.4), som igjen leder fram til (6.14). Siden betingelsene i (6.17) ble avledet fra (6.14), kan de derfor også avledes fra (6.22). Ved inspeksjon av (6.17) og (6.22) finner vi at det er nettopp de koeffisientene som er inneholdt i matrisen (6.24), som er avgjørende for om β_{12} , β_{13} og γ_{11} kan bestemmes ved hjelp av (6.17), og at betingelsene kan uttrykkes ved rangen til (6.24).

Men det er av interesse at vi også mer direkte kan avlede nødvendige og tilstrekkelige betingelser for identifiserbarhet av en strukturrelasjon med utgangspunkt i den tilordnede (n-1)-reduserte

1) Siden x_3 forekommer bare i 3. likning i (6.23), kunne vi ha utelatt 3. likning, og samtidig ha utelatt tredje linje i (6.25). Rangbetingelsen ville da bli at denne matrisen skulle ha rang e n m i n d r e e n n tallet på endogene variable i strukturlikning nr. 2. Betingelsen er kanskje noe lettere å anvende i denne form, som også er den vanlige i litteraturen. Men regelen i den første form har, som vi skal se, den fordel at den direkte kan overføres på identifikasjonsbetingelser uttrykt ved β -koeffisientene og γ -koeffisientene istedenfor ved Π -koeffisientene.

form. Vi tar først for oss (6.22) og merker oss at strukturrelasjon nr. 1 sikkert ville ha vært identifiserbar, dersom x_2 og x_3 hadde vært eksogene (frie) variable. Spørsmålet er om variasjonsmulighetene for x_2 og x_3 er "tilstrekkelig frie", når variasjonen i x_2 og x_3 er bestemt av henholdsvis likning nr. 2 og likning nr. 3 i (6.22). Det vil de sikkert være, dersom det lar seg gjøre å disponere de eksogene variable som ikke forekommer i likning nr. 1 (men bare i nr. 2 og nr. 3) på en slik måte at x_2 og x_3 antar vilkårlig fikserte verdier, x_2^0 og x_3^0 , altså hvis systemet

$$\begin{aligned}\Pi_{22}z_2 + \Pi_{23}z_3 + \Pi_{24}z_4 &= x_2^0 - \Pi_{21}z_1 \\ \Pi_{32}z_2 + \Pi_{33}z_3 + \Pi_{34}z_4 &= x_3^0 - \Pi_{31}z_1\end{aligned}$$

har - en eller flere - løsninger for z_2 , z_3 og z_4 (når z_1 , som også forekommer i likning nr. 1, betraktes som en konstant, enten den står for en "hjelpevariabel" med fast verdi 1 eller den står for en vanlig eksogen variabel). Betingelsen for at løsninger eksisterer er at koeffisientmatrisen

$$\begin{bmatrix} \Pi_{22} & \Pi_{23} & \Pi_{24} \\ \Pi_{32} & \Pi_{33} & \Pi_{34} \end{bmatrix}$$

har rang lik 2. Dette er altså en tilstrekkelig betingelse for å bestemme vilkårlige verdier x_2^0 og x_3^0 ved hjelp av z -variable som ikke forekommer i strukturlikningen. Hvis denne matrisen har rang mindre enn to, så er elementene i matrisens to linjer lineært avhengige, d.v.s. det er mulig å finne to konstanter λ_2 og λ_3 slik at $\lambda_2 \Pi_{2j} + \lambda_3 \Pi_{3j} = 0$ for $j = 2, 3, 4$. Ved å multiplisere den første av likningene ovenfor med λ_2 og den andre med λ_3 , og så ta summen, forsvinner leddene på venstresiden, og vi får

$$\lambda_2 x_2^0 + \lambda_3 x_3^0 - (\lambda_2 \Pi_{21} + \lambda_3 \Pi_{31}) z_1 = 0 \quad (\text{for alle mulige observasjonssett})$$

som er en betingelse av formen (5.4). Den innebærer lineær avhengighet mellom x_2^0 , x_3^0 og z_1 , og at strukturelasjon nr. 1 ikke er identifiserbar. Derfor har vi konklusjonen at rang lik 2 for matrisen ovenfor er nødvendig og tilstrekkelig for identifiserbarhet. Vi har altså oppnådd samme konklusjon som tidligere ved et resonnement som er direkte basert på den (n-1)-reduserte form tilordnet vedkommende strukturelasjon.

For å komme over fra betingelsene for identifiserbarhet uttrykt ved Π -koeffisientene til betingelsene uttrykt ved β -koeffisientene og γ -koeffisientene, trenger vi en setning om transformasjoner, som vi her tillemper for strukturelasjon nr. 2 i vårt spesielle eksempel. Vi definerer først 3 hjelpevariable, v_1 , v_2 og v_3 , ved

$$\begin{aligned} v_1 &= 0 \cdot x_3 + \Pi_{12} z_2 + \Pi_{13} z_3 + \Pi_{14} z_4 \\ (6.26) \quad v_2 &= 0 \cdot x_3 + 0 \cdot z_2 + 0 \cdot z_3 + 0 \cdot z_4 \\ v_3 &= -1 \cdot x_3 + \Pi_{32} z_2 + \Pi_{33} z_3 + \Pi_{34} z_4, \end{aligned}$$

der koeffisientene er hentet fra matrisen (6.25). Disse variable er summer av de leddene i (6.23) som inneholder de variable som er utelatt i strukturelasjon nr. 2 (derfor er v_2 lik null). Så innfører vi ytterligere tre hjelpevariable, v_1^* , v_2^* og v_3^* , definert ved

$$\begin{aligned} v_1^* &= 1 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + 0 \cdot v_3 \\ (6.27) \quad v_2^* &= -\beta_{21} v_1 + 1 \cdot v_2 + 0 \cdot v_3 \\ v_3^* &= 0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + 1 \cdot v_3, \end{aligned}$$

der koeffisientene danner matrisen

$$(6.28) \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\beta_{21} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

Denne matrisen er den inverse av koeffisientmatrisen til x_1 , x_2 og x_3 i den (n-1)-reduserte form (6.23). De variable v_1^* , v_2^* og v_3^* er derfor summer av de leddene i den "helt reduserte" form av (6.23) som inneholder de variable som er utelatt i strukturrelasjon nr. 2. Ved å sette inn v_1 , v_2 og v_3 , gitt ved (6.26), i (6.27), får vi

$$(6.29) \quad \begin{aligned} v_1^* &= 0 \cdot x_3 + \Pi_{12} z_2 + \Pi_{13} z_3 + \Pi_{14} z_4 \\ v_2^* &= 0 \cdot x_3 - \beta_{21} \Pi_{12} z_2 - \beta_{21} \Pi_{13} z_3 + \beta_{21} \Pi_{14} z_4 \\ v_3^* &= -1 \cdot x_3 + \Pi_{32} z_2 + \Pi_{33} z_3 + \Pi_{34} z_4 \end{aligned}$$

hvor likning nr. 2 uttrykker - det åpenbart riktige - at virkningene alt i alt (dvs. via den reduserte form) på x_2 av variable som er utelatt i strukturrelasjon nr. 2, må være proporsjonal med virkningen på x_1 av de samme variable, med proporsjonalitetsfaktor $(-\beta_{21})$. Koeffisientmatrisen i (6.29) er

$$(6.30) \quad \begin{bmatrix} 0 & \Pi_{12} & \Pi_{13} & \Pi_{14} \\ 0 & -\beta_{21} \Pi_{12} & -\beta_{21} \Pi_{13} & -\beta_{21} \Pi_{14} \\ -1 & \Pi_{32} & \Pi_{33} & \Pi_{34} \end{bmatrix} .$$

Siden elementene i matrisens 1. og 2. linje er proporsjonale, er matrisens rang upåvirket av at alle elementer i 2. linje settes lik null. Derfor har (6.30) samme rang som koeffisientmatrisen (6.25).

Dette gir en illustrasjon av en setning om matrisers rang som går ut på at *e n - e n t y d i g e* transformasjoner av formen (6.27) alltid innebærer at rangen til matrisen i den avledede form - her (6.30) - er lik rangen til matrisen i den opprinnelige form - her (6.25).¹⁾

Den konklusjon at identifikasjonsegenskapene for strukturrelasjon nr. 2 kan uttrykkes ved samme rangbetingelse for matrisen (6.30) som for matrisen (6.25), er vesentlig av interesse som et "mellomresultat". Ved å foreta enda en ikke-singulær transformasjon, fra v_1^* , v_2^* og v_3^* definert ved (6.29) til w_1 , w_2 og w_3 , definert ved

$$\begin{aligned} w_1 &= 1 \cdot v_1^* + \beta_{12} v_2^* + \beta_{13} v_3^* \\ (6.31) \quad w_2 &= \beta_{21} v_1^* + 1 \cdot v_2^* + 0 \cdot v_3^* \\ w_3 &= 0 \cdot v_1^* + 0 \cdot v_2^* + 1 \cdot v_3^* \end{aligned}$$

der koeffisientene er hentet fra matrisen (6.10), kommer vi fram til følgende likningssystem:

$$\begin{aligned} w_1 &= -\beta_{13} x_3 + \sum_{j=2}^4 [(1 - \beta_{21} \beta_{12}) \Pi_{1j} + \beta_{13} \Pi_{3j}] z_j \\ (6.32) \quad w_2 &= 0 \cdot x_3 + \sum_{j=2}^4 (\beta_{21} - \beta_{21}) \Pi_{1j} z_j \\ w_3 &= -1 \cdot x_3 + \sum_{j=2}^4 \Pi_{3j} z_j. \end{aligned}$$

1) I matriseterminologi: Hvis matrisen A med n linjer og m kolonner, har rang r (der r er mindre enn eller lik det minste av tallene n og m), og matrisen B, med n linjer og n kolonner, har rang n (er ikke-singulær), så har også matrisen C = BA rang lik r.

Når vi gjør bruk av sammenhengene mellom Π -koeffisienter og strukturlikningenes koeffisienter gitt tidligere (i oppstillingen umiddelbart etter formel (6.6)), finner vi at høyresidekoeffisientene i (6.32) danner følgende matrise - etter en fortegnssending for alle elementene -:

$$(6.33) \quad \begin{bmatrix} \beta_{13} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \gamma_{32} & \gamma_{33} & \gamma_{34} \end{bmatrix}$$

Vi har kommet fram til matrisen (6.33) for likningssystemet (6.32) fra matrisen (6.25) for likningssystemet (6.26) ved transformasjoner som ikke endrer matrisenes rang. Derfor kan identifikasjonsegenskapene for strukturrelasjon nr. 2 likeverdig uttrykkes ved den samme rangbetingelse for matrisen (6.33) som for matrisen (6.25). Det er matrisen på formen (6.33) som er best egnet for praktiske anvendelser. Den regel som vi har vist gyldigheten av for vårt eksempel, og som mer generelt har gyldighet for lineære modeller av formen (4.1) - pålagt analoge restriksjoner - kan gis følgende greie form:

Undersøk rangen til den matrise som inneholder alle strukturrelasjoners koeffisienter for de variable som ikke forekommer i en bestemt strukturrelasjon. Denne strukturrelasjonen er identifiserbar hvis, og bare hvis, rangen til matrisen er en mindre enn tallet på strukturrelasjoner i modellen.

Anvendt på (6.33) ser vi at denne betingelsen er oppfylt som en konsekvens av modellens forutsetning om at x_3 forekommer som forklaringsvariabel i relasjon nr. 1 og nr. 3, og at z_2 , z_3 og z_4 forekommer i relasjon nr. 3. Vi kan danne tre to-radede determinanter (av formen $\beta_{13}\gamma_{3j}$ for $j = 2, 3, 4$) som etter forutsetningene har verdi forskjellig fra null. Rangen er derfor lik 2.

Vi skal undersøke noen varianter av modellspesifikasjonen (6.1) - (6.3) i lys av konklusjonen om identifiserbarhet for strukturrelasjon nr. 2. Vi velger som utgangspunkt at denne fortsatt er som spesifisert i (6.2), dvs. bare de variable x_1 , x_2 og z_1 forekommer i denne relasjonen.

Hvis vi fortsatt holder fast ved at de øvrige variable, x_3 , z_2 , z_3 og z_4 , forekommer i modellen, dvs. enten i (6.1) eller i (6.3) eller i begge, vil fortsatt matrisen (6.33) ha fire kolonner, og hver kolonne må inneholde minst en koeffisient som a priori er forutsatt å være forskjellig fra null (i første og/eller tredje linje). De kritiske tilfellene oppstår når det er m a n g e nullrestriksjoner. I vårt eksempel vil f.eks. nullrestriksjoner på alle koeffisienter i første linje føre til at matrisen får rang 1, og at strukturrelasjon nr. 2 ikke er identifiserbar. Andre varianter, med færre nullrestriksjoner vil i alminnelighet gi rang 2 og identifiserbarhet.

For at matrisen (6.33) skal kunne ha rang 2, må den inneholde minst to kolonner. Det følger at det er nødvendig (men ikke tilstrekkelig) at modellen inneholder minst to variable som ikke forekommer i relasjon nr. 2, jfr. også den tidligere etablerte telleregelen. En viktig kommentar i denne sammenheng er at det selvsagt er meningsløst å innføre ytterligere variable i de andre relasjoner uten annen "begrunnelse" enn at "da blir relasjon nr. 2 identifiserbar etter telleregelen". Rangbetingelsen må være oppfylt, og den krever mer enn en opptelling av variable.

I største korthet kan innholdet i dette avsnitt sammenfattes i følgende punkter:

- (i) Identifikasjonsegenskapene til det komplette system (6.1) - (6.3) av strukturelasjoner er hovedsakelig behandlet under den forutsetning at a priori restriksjoner pålagt strukturcoeffisientene har form av nullrestriksjoner og at varianser og kovarianser for de restleddsvariable ikke er pålagt noen a priori restriksjoner.
- (ii) Under de spesifiserte forutsetninger sammenfatter likningssystemene (6.17) - (6.19) all informasjon, a priori og via den reduserte form (6.4) - (6.6), om strukturcoeffisientene i (6.1) - (6.3). Nødvendige og tilstrekkelige betingelser for identifiserbarhet kan direkte avledes fra (6.17) - (6.19), sammenfattet i (6.21).
- (iii) Bruk av de avlede (n-1)-reduserte formene (6.22) og (6.23), tilordnet første og annen strukturelasjon, letter i noen grad den algebraiske utledning av kriteriene for identifiserbarhet. De kan også brukes til en direkte utledning av betingelser for identifiserbarhet.

7. Identifikasjon av lineære strukturelasjoner generelt; innføring av matriseform.¹⁾

Vårt utgangspunkt er nå en modell av formen (4.1), som består av n likninger i like mange endogene variable, og der det forekommer m eksogene variable. Vi søker betingelsene for at strukturcoeffisientene i disse likninger er identifiserbare.

Som tidligere ser vi bort fra dynamiske utforminger; modellen inneholder ingen predeterminerte endogene variable. Alle modellens relasjoner er strukturelasjoner som inneholder en restleddsvariabel; eventuelle lineære definisjonsrelasjoner forutsettes å være eliminert.

1) Framstillingen forutsetter bare i beskjedent omfang kjennskap til matrisealgebraen.

Den generelle stokastiske hypotese fra avsnitt 4 om relasjonenes restledd opprettholdes. Ingen a priori restriksjoner forutsettes å være pålagt noen av variansene eller kovariansene (elementene i matrisen Σ) for de restleddsvariable.

Uttrykt i vanlig algebra er strukturformen som i (4.1), dvs.

$$(7.1.a) \quad \sum_{j=1}^n \beta_{ij} x_j + \sum_{k=1}^m \gamma_{ik} z_k + u_i = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

(der vi for enkelhets skyld har sløyfet markering - ved fotskrift t - av observasjonsnummer for de variable). Den reduserte form, som eksisterer når koeffisientmatrisen $B = (\beta_{ij})$ er ikke-singulær, er som i (4.2), dvs.

$$(7.2.a) \quad x_i = \sum_{k=1}^m \Pi_{ik} z_k + \varepsilon_i, \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

der ε_i er definert ved (4.3), altså

$$(7.3.a) \quad \varepsilon_i = - \sum_{j=1}^n \beta_{ij}^{-1} u_j, \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Uttrykt på matriseform får vi de tre korresponderende likninger:

$$(7.1.b) \quad Bx + Cz + u = 0,$$

$$(7.2.b) \quad x = \Pi z + \varepsilon,$$

$$(7.3.b) \quad \varepsilon = -B^{-1}u,$$

der matrisene $B = (\beta_{ij})$, $C = (\gamma_{ik})$, $\Pi = (\Pi_{ik})$ og den inverse matrise $B^{-1} = (\beta_{ij}^{-1})$ er de samme som i avsnitt 4, og der x , z , u og ε er kolonnevektorer som er nærmere definert nedenfor, mens 0 er en kolonnevektor med alle elementer lik null.

Uttrykt i vanlig algebra finner vi lettest hvorledes Π -koeffisientene er avledet av strukturkoeffisientene ved å sette inn i (7.1.a) for x_j uttrykt ved (7.2.a). Vi får

$$\sum_{j=1}^n \beta_{ij} (\sum_{k=1}^m \Pi_{jk} z_k + \varepsilon_j) + \sum_{k=1}^m \gamma_{ik} z_k + u_i = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

Ved sammentrekning av leddene, og når ε_j uttrykkes ved (7.3.a), faller de restleddsvariable bort, jfr. at

$$\begin{aligned} \sum_j \beta_{ij} \varepsilon_j &= -\sum_j \beta_{ij} \sum_h \beta_{jh}^{-1} u_h \\ &= -\sum_h (\sum_j \beta_{ij} \beta_{jh}^{-1}) u_h \\ &= -\sum_h \delta_{ih} u_h = -u_i, \end{aligned}$$

der $\delta_{ih} = 1$ for $h = i$, og null ellers. Likningssystemet reduserer seg derfor til

$$\sum_{k=1}^m (\sum_{j=1}^n \beta_{ij} \Pi_{jk} + \gamma_{ik}) z_k = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

I likhet med (7.1.a) og (7.2.a) skal likningen gjelde for vilkårlige verdier av z_1, z_2, \dots, z_m ; derfor må koeffisientene for alle z_k være null. Det gir de $n \cdot m$ betingelsene

$$(7.4.a) \quad \sum_{j=1}^n \beta_{ij} \Pi_{jk} + \gamma_{ik} = 0; \quad \begin{array}{l} (i = 1, 2, \dots, n) \\ (k = 1, 2, \dots, m), \end{array}$$

som vi lett ser har matriseformen

$$(7.4.b) \quad B\Pi = -C.$$

Den samme likning kan utledes direkte fra (7.1.b). Ved å premultiplisere alle ledd med B^{-1} finner vi at Π må være lik $-B^{-1}C$. Premultiplikasjon med B gir (7.4.b). For $n = 3$, $m = 4$ går (7.4.a), og den ekvivalente form (7.4.b), over til (6.21), som er behandlet i avsnitt 6.

Vi får nokså ofte bruk for å angi hvor mange linjer og kolonner en matrise består av. Vi skal til dels bruke skrivemåten $A(p,q)$ for å markere at matrisen A har p linjer og q kolonner. Ekvivalente uttrykk er " A er en (p,q) -matrise", og " A er (p,q) ". For $q=1$ står $A(p,1)$ for en kolonnevektor med p elementer. For $p=1$ står $A(1,q)$ for en linjevektor med q elementer. Ved transponering må linjetallet p og kolonne-tallet q skifte plass. Den transponerte til $A = A(p, q)$ blir $A' = A'(q, p)$. Det blir særlig bruk for disse markeringene når matrisene ovenfor skal oppsplittes i delmatriser.

Vi skal bruke denne skrivemåten for definisjonene av kolonnevektorene som inngår i (7.1.b) - (7.3.b):

$x = x(n, 1)$; kolonnevektor, elementene er x_1, x_2, \dots, x_n .

$z = z(m, 1)$; kolonnevektor, elementene er z_1, z_2, \dots, z_m .

$u = u(n, 1)$; kolonnevektor, elementene er u_1, u_2, \dots, u_n .

$\varepsilon = \varepsilon(n, 1)$; kolonnevektor, elementene er $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_m$.

Analogt med i avsnitt 6 utledes betingelsene for at modellens strukturcoeffisienter skal være identifiserbare fra relasjoner som her har formen (7.4.a) eller matriseformen (7.4.b). Vi bygger da på konklusjonen fra avsnitt 5 om at parametrene i modellens reduserte form - med det forbehold at (5.4) ikke må gjelde - er identifiserbare. Dessuten bygger vi på de a priori restriksjonene på strukturcoeffisientene i matrisene B og C som følger av at ikke alle variable forekommer i alle likninger. Disse kommer til uttrykk som nullrestriksjoner på de tilhørende coeffisientene. Endelig betyr - analogt med i avsnitt 6 - den allerede nevnte forutsetning om at det

ikke gjelder noen restriksjoner på restleddenes varianser og kovarianser, at (7.4.b) gir all informasjon om den reduserte form som har betydning for betingelsene for identifiserbarhet av strukturkoefisientene. Det er hensiktsmessig å ta for seg en likning om gangen.

Vi kan alltid innrette likningssystemet (7.1.b) slik at den likning som skal undersøkes, står som den første. Vi kan dessuten ordne rekkefølgen av henholdsvis de endogene variable og de eksogene variable i systemet på en slik måte at de som forekommer i første strukturlikning, står foran de som ikke forekommer i denne likning. Vi tar som utgangspunkt at (7.1.b) er ordnet på denne måten, og at den første likningen derfor har formen

$$\sum_{j=1}^{n_1} \beta_{1j} x_j + 0 \cdot \sum_{j=n_1+1}^n x_j + \sum_{k=1}^{m_1} \gamma_{1k} z_k + 0 \cdot \sum_{k=m_1+1}^m z_k + u_1 = 0.$$

Det betyr at n_1 står for tallet på endogene variable som er med i første likning, mens $n - n_1 = n_2$ endogene variable er utelatt. Tilsvarende står m_1 for tallet på eksogene variable som forekommer i første likning, mens $m - m_1 = m_2$ eksogene variable er utelatt. De øvrige likninger i systemet beholder vi i uendret form, uten i denne sammenheng å markere hvilke variable som er utelatt i de øvrige likningene.

Innføres disse markeringene i (7.4.a), må summeringene fra 1 til n_1 og fra (n_1+1) til n foretas atskilt; dessuten må de m_1 likningene for $k = 1, 2, \dots, m_1$ og de m_2 likningene for $k = (m_1+1), \dots, m$ holdes fra hverandre. Vi setter $i=1$, siden det er koefisientene i første strukturlikning som skal behandles. Vi får to sett av likninger.

$$(7.5.a) \quad \sum_{j=1}^{n_1} \beta_{1j} \Pi_{jk} + 0 \cdot \sum_{j=n_1+1}^n \Pi_{jk} + \gamma_{1k} = 0; \quad (k = 1, 2, \dots, m_1)$$

$$(7.6.a) \quad \sum_{j=1}^{n_1} \beta_{1j} \Pi_{jk} + 0 \cdot \sum_{j=n_1+1}^n \Pi_{jk} = 0; \quad (k = m_1+1, \dots, m).$$

Vi søker betingelsene for at disse $m = m_1 + m_2$ likningene, sammen med en normaliseringsregel, jfr. avsnitt 4, bestemmer entydig de n_1 β_{1j} -koeffisientene og de m_1 γ_{1k} -koeffisientene i første strukturrelasjon.

Vi merker oss den nødvendige, men ikke tilstrekkelige, betingelse at tallet på koeffisienter som skal bestemmes, ikke må være større enn tallet på likninger i (7.5.a) og (7.6.a). Når hensyn tas til normaliseringsregelen (som f.eks. kan være at β_{11} a priori er satt lik -1), er tallet på koeffisienter som skal bestemmes, lik $(n_1 + m_1 - 1)$, mens tallet på likninger er $(m_1 + m_2)$. En nødvendig betingelse er derfor at ulikheten $(m_1 + m_2) \geq (n_1 + m_1 - 1)$ må gjelde. Ved subtraksjon av m_1 får vi den greiere form $m_2 \geq (n_1 - 1)$, dvs. at tallet på utelatte eksogene variable minimalt må være **e n m i n d r e e n n** tallet på ikke utelatte endogene variable ("telleregelen").

Et likeverdig utsagn er at tallet på utelatte variable i alt (endogene pluss eksogene) minimalt må være **e n m i n d r e e n n** tallet på endogene variable i modellen. Denne ulikheten følger av den foregående ved å addere n_2 til begge sider; det gir $n_2 + m_2 \geq (n - 1)$.

"Telleregelen" sikrer ikke at vi har akkurat nok **l i n e æ r t u a v h e n g i g e** likninger. Det følger av teorien for lineære likningssystemer at det er nødvendig og tilstrekkelig for å bestemme entydig de n_1 β_{1j} -koeffisientene og de m_1 γ_{1k} -koeffisientene at (7.5.a) og (7.6.a) danner et system med nøyaktig $(n_1 + m_1 - 1)$ lineært uavhengige likninger. Hvis denne betingelsen er oppfylt, må "de ukjente" bli bestemt ved (7.5.a) og (7.6.a) på en proporsjonalitetsfaktor nær; denne proporsjonalitetsfaktoren blir så bestemt ved normaliseringsregelen.

Det er rangen til matrisen av koeffisienter i (7.5.a) og (7.6.a) som greiest uttrykker betingelsen om akkurat $(n_1 + m_1 - 1)$ lineært uavhengige likninger, jfr. den mer utførlige drøfting av eksemplet i avsnitt 6.¹⁾ Systemet inneholder nøyaktig $(n_1 + m_1 - 1)$ lineært uavhengige likninger hvis, og bare hvis, rangen til denne matrisen er lik $(n_1 + m_1 - 1)$.

Vi ser at koeffisientmatrisen til systemet (7.5.a) - (7.6.a) er sammensatt av elementer fra de n_1 første linjene i matrisen Π , og dessuten av elementer som er 0 eller 1. I (7.5.a) forekommer Π -elementer bare fra Π -matrisens m_1 første kolonner og i (7.6.a) bare fra dens m_2 siste kolonner. Vi innfører derfor delmatriser av Π som tilsvarer denne linje- og kolonne-inndelingen.

$$\Pi = \Pi(n, m) = \begin{bmatrix} \Pi(n_1, m_1) & \Pi(n_1, m_2) \\ \Pi(n_2, m_1) & \Pi(n_2, m_2) \end{bmatrix}$$

Videre innfører vi linjevektorene $\beta_1(1, n_1)$, med elementer β_{1j} for $j = 1, 2, \dots, n_1$, og $\gamma(1, m_1)$, med elementer γ_{1k} for $k = 1, 2, \dots, m_1$. Da kan (7.5.a) - (7.6.a) skrives

$$(7.5.b) \quad \beta_1(1, n_1) \cdot \Pi(n_1, m_1) + \gamma_1(1, m_1) \cdot I(m_1, m_1) = 0(1, m_1)$$

$$(7.6.b) \quad \beta_1(1, n_1) \cdot \Pi(n_1, m_2) + \gamma_1(1, m_1) \cdot 0(m_1, m_2) = 0(1, m_2),$$

og sett under ett gir disse likningene et system med koeffisientmatrise

$$P = P(n_1 + m_1, m) = \begin{bmatrix} \Pi(n_1, m_1) & \Pi(n_1, m_2) \\ I(m_1, m_1) & 0(m_1, m_2) \end{bmatrix}$$

Det følger nokså direkte av definisjonen at rangen til $P(n_1 + m_1, m)$ må være lik rangen til $\Pi(n_1, m_2)$ pluss rangen til $I(m_1, m_1)$, jfr. at

1) Definisjonen av rang, også gitt i avsnitt 6, er: En matrise har rang r hvis den inneholder minst en r -radet determinant med verdi forskjellig fra null, mens alle determinanter med radtall større enn r , som matrisen måtte inneholde, har verdien null. Matrisen har rang null, hvis alle dens elementer er null.

delmatrisen i nedre høyre felt består av bare nuller. Hvis nemlig delmatrisen $\Pi(n_1, m_2)$ inneholder en r -radet determinant som er forskjellig fra null, så vil $P(n_1 + m_1, m)$ inneholde en $(r + m_1)$ -radet determinant som er forskjellig fra null, p.g.a. enhetsmatrisen $I(m_1, m_1)$ i nedre venstre felt. Derfor er betingelsen om at koeffisientmatrisen til systemet (7.5.a) - (7.6.a) må ha rang $(n_1 + m_1 - 1)$ likeverdig med en betingelse om at delmatrisen $\Pi(n_1, m_2)$ må ha rang $(n_1 - 1)$.

Vi har dermed fått en nødvendig og tilstrekkelig betingelse for identifiserbarhet av koeffisientene i første strukturlikning - når det ikke er pålagt noen restriksjoner på elementene i Σ -matrisen - uttrykt som betingelser på visse av reduserte form-koeffisientene. For å kunne dra nytte av kriteriet, må det transformeres til betingelser på strukturkoeffisientene, idet det er disse som ut fra teoretiske overveielser kan pålegges visse restriksjoner a priori.¹⁾

1) Vi har unnlatt å innføre de oppsplittinger av B og C i delmatriser - med markering av nullrestriksjoner - som må til for å uttrykke (7.5.a), (7.6.a) og de øvrige likninger i (7.4.a) i delmatriselikninger. En gjennomført bruk av delmatriser i alle spesifikasjoner og algebraiske utledninger krever linjeoppsplitting ikke bare av matrisene B og C , men også av kolonnevektorene x , z , u og ε , med ulike oppsplittinger for hver av dem. Hvis dette gjennomføres i alle formler med markering som ovenfor av linjetall og kolonnetall, kommer matriseformen mer på linje med vanlig algebra når det gjelder oversiktighet og kompakt notasjonsform. Forenkles linjetall- og kolonnetallmarkeringer, slik det ofte gjøres i litteraturen, oppnåes bare en tilsynelatende forenkling; det er ulemper ved å måtte belaste hukommelsen med en katalog av symbolbetegnelser. Mange vil kanskje foretrekke vanlig algebra og vanlig notasjonssystem, slik det er gjort i eksemplet i avsnitt 6. Intet behøver å gå tapt ved det.

Transformasjonen fra rangbetingelsen på delmatrisen $\Pi(n_1, m_2)$ til en rangbetingelse på en delmatrise dannet av strukturkoeffisientene kan foretas på forskjellige måter. De bygger alle på en setning fra matrisealgebraen - allerede brukt i avsnitt 6 - som kort referert har følgende innhold: Hvis A har rang r, hvis B er kvadratisk og ikke-singulær og hvis produktet (BA) eksisterer, så har (BA) rang r.

Vi skal her bruke en transformasjon som sparer oss for å foreta linjeoppdelinger av B og C og, i første omgang, av Π . Men skillet mellom variable som forekommer og variable som ikke forekommer i første strukturrelasjon må opprettholdes. Derfor er kolonneoppdelinger og kolonnemarkeringer (men ikke linjemarkeringer) av B, C og Π nødvendig.

Strukturlikningene (7.1.b) ordner vi om til formen

$$(7.1.c) \quad \begin{aligned} B_1 x_1 &= -C_1 z_1 - (B_2 x_2 + C_2 z_2) - u \\ &= -(C_1 z_1 + A_2 y_2 + u) \end{aligned}$$

der

$$\begin{aligned} B_1 &= B(n, n_1); & \text{de } n_1 & \text{ første kolonnene i } B(n, n) \\ x_1 &= x(n_1, 1); & \text{de } n_1 & \text{ første linjene i } x(n, 1) \\ C_1 &= C(n, m_1); & \text{de } m_1 & \text{ første kolonnene i } C(n, m) \\ z_1 &= z(m_1, 1); & \text{de } m_1 & \text{ første linjene i } z(m, 1) \\ B_2 &= B(n, n_2); & \text{de } n_2 & \text{ siste kolonnene i } B(n, n) \\ x_2 &= x(n_2, 1); & \text{de } n_2 & \text{ siste linjene i } x(n, 1) \\ C_2 &= C(n, m_2); & \text{de } m_2 & \text{ siste kolonnene i } C(n, m) \\ z_2 &= z(m_2, 1); & \text{de } m_2 & \text{ siste linjene i } z(m, 1), \end{aligned}$$

og der

$$A_2 = A(n, n_2+m_2) = [B_2 C_2].$$

$y_2 = y(n_2+m_2, 1)$; kolonnevektor for utelatte variable (endogene og eksogene) i første likning; de første n_2 elementene er x_2 ; de m_2 siste er z_2 .

Medtilsvarende ordning i delmatriser av enhetsmatrisen

$I = I(n, n)$ som av $B = B(n, n)$, og av $\Pi(n, m)$ som av $C(n, m)$ kan den reduserte form (7.2.b) skrives

$$(7.2.c) \quad I_1 x_1 = \Pi_1 z_1 + (-I_2 x_2 + \Pi_2 z_2) + \varepsilon \\ = \Pi_1 z_2 + P_2 y_2 + \varepsilon$$

der

$I_1 = I(n, n_1)$; de n_1 første kolonnene i $I(n, n)$
 $\Pi_1 = \Pi(n, m_1)$; de m_1 første kolonnene i $\Pi(n, m)$
 $I_2 = I(n, n_2)$; de n_2 siste kolonnene i $I(n, n)$
 $\Pi_2 = \Pi(n, m_2)$; de m_2 siste kolonnene i $\Pi(n, m)$,

og der

$$P_2 = P_2(n, n_2+m_2) = [-I_2 \Pi_2].$$

(Merk at $I(n, n_1)$ og $I(n, n_2)$ ikke er enhetsmatriser, men rektangulære delmatriser av $I(n, n)$, uoppdelt på linjer, men splittet etter kolonner.)

Ved nå å premultiplisere alle ledd i (7.1.c) med B^{-1} transformeres denne til den reduserte form (7.2.c), og vi har pr. definisjon følgende relasjoner mellom delmatrisene:

$$B^{-1} B_1 = I_1; \quad -B^{-1} C_1 = \Pi_1; \quad -B^{-1} A_2 = P_2.$$

Bare den siste av disse relasjonene har interesse i denne sammenheng.

Den gir den opplysning at matrisene A_2 og P_2 har samme rang, (idet matrisen B^{-1} er ikke-singulær).

Følgende oppsplitting av P_2 ,

$$P_2 = \begin{bmatrix} -I_2 \Pi_2 \\ 0(n_1, n_2) \Pi(n_1, m_2) \\ -I(n_2, n_2) \Pi(n_2, m_2) \end{bmatrix}$$

viser - siden matrisen i øvre venstre felt består av nullelementer - at rang P_2 er lik rang $\Pi(n_1, m_2)$

plus n_2 . Dermed er overgangen fra rangbetingelsen uttrykt ved $\Pi(n_1, m_2)$ til rangbetingelsen uttrykt ved strukturkoeffisient-

matrisene etablert. Under de spesifiserte forutsetninger er første

strukturelasjon identifiserbar hvis, og bare hvis, matrisen $A_2 = [B_2 C_2]$

har rang lik $(n_1 - 1 + n_2) = (n-1)$. Matrisen $A_2 = [B_2 C_2]$ har $(n_2 + m_2)$

kolonner og kan derfor ikke ha rang $(n-1)$ uten at $(n_2 + m_2) \geq (n-1)$.

Alle elementer i første linje av A_2 er lik null; derfor kan rangen ikke

være større enn $(n-1)$. Dermed har vi vist gyldigheten, for en modell

med et vilkårlig antall endogene og eksogene variable, av betingelser

som i avsnitt 6 var basert på et eksempel der tallet på endogene og

eksogene variable var henholdsvis 3 og 4.

En annen måte å foreta transformasjonen på, er å gå via "den $(n-1)$ -reduerte form tilordnet første strukturlikning", definert ved (5.8). Denne ble brukt ved transformasjonene i vanlig algebra i avsnitt 6 og førte da til forenklinger. På matriseform kan den greiest defineres ved en ikke-singulær transformasjon av den "helt reduserte form" (7.2.b). Ved å premultiplisere alle ledd i (7.2.b) med en ikke-singulær (n, n) - matrise, J , som står for koeffisientmatrisen til x_1, x_2, \dots, x_n i (5.8), får vi

$$(7.7) \quad Jx = (J\Pi)z + (J\varepsilon).$$

At dette gir matriseformen av (5.8), med $(J\Pi)$ som koeffisientmatrise for z_1, z_2, \dots, z_m og med $(J\varepsilon)$ som kolonnevektor for de restleddsvariable, finner en ved å foreta multiplikasjonene $J\Pi$ og $J\varepsilon$.

På grunn av den algebraisk enkle overgang fra (7.2.b) til (7.7) forsvinner, når matriseformen brukes, de algebraiske forenklinger ved å gjennomføre transformasjonene via formen (7.7). Men som i avsnitt 6 har denne formen interesse også fordi den nokså direkte gir uttrykk for hvorfor kriteriene for identifiserbarhet er knyttet til rangen av en delmatrise i matrisen Π .

Når samme nullrestriksjoner som foran opprettholdes for første strukturlikning, og når normaliseringsbetingelsen $\beta_{11} = -1$ innføres, kan (7.7) sammenfattes i følgende tre matriselikninger:

$$(7.8.1) \quad x(1,1) - J(1, n_1 - 1) \cdot x(n_1 - 1, 1) = C(1, m_1) \cdot z(m_1, 1) + \xi(1, 1)$$

$$(7.8.2) \quad x(n_1 - 1, 1) = \Pi(n_1 - 1, m_1) \cdot z(m_1, 1) + \Pi(n_1 - 1, m_2) \cdot z(m_2, 1) + \xi(n_1 - 1, 1)$$

$$(7.8.3) \quad x(n_2, 1) = \Pi(n_2, m_1) \cdot z(m_1, 1) + \Pi(n_2, m_2) \cdot z(m_2, 1) + \xi(n_2, 1)$$

der ξ med linje- og kolonnemarkeringer står for elementene i $(J\varepsilon)$.

Alle delmatriser er hentet fra tidligere definerte matriser. Linjemarkeringene skiller ut første linje, de $(n_1 - 1)$ følgende linjer og de n_2 siste linjer; kolonnemarkeringene følger at at variable som forekommer i første likning, holdes atskilt fra variable som er utelatt i denne likningen, og av at x_1 er utskilt særskilt. Spesielt er

$J(1, n_1 - 1)$ linjevektoren $(\beta_{12}, \beta_{13}, \dots, \beta_{1n_1})$ og

$C(1, m_1)$ er linjevektoren $(\gamma_{11}, \gamma_{12}, \dots, \gamma_{1m_1})$. Koeffisientmatrisen

$\Pi(n_1 - 1, m_2)$ i (7.8.2) sammenfatter de Π -koeffisientene som rangbetingelsen er knyttet til. Denne matrisen finner en lett må ha samme

r a n g s o m $\Pi(n_1, m_2)$, fordi første linje i $\Pi(n_1, m_2)$ - utelatt i $\Pi(n_1-1, m_2)$ - er lineært avhengig av de øvrige linjer p.g.a. (7.6.a) eller (7.6.b).

Ved samme slags resonnement som i avsnitt 6 kommer en også her til den konklusjon at variasjoner i de eksogene variable som er utelatt i første likning - samlet i vektoren $z(m_2, 1)$ - åpner muligheter for "tilstrekkelig frie" avledede variasjoner i vektoren $x(n_1-1, 1)$ til å sikre identifiserbarhet av første likning hvis, og bare hvis, matrisen $\Pi(n_1-1, m_2)$ - og derfor også hvis, og bare hvis, matrisen $\Pi(n_1, m_2)$ - har rang lik (n_1-1) . Vi skal ikke her bruke ytterligere plass til detaljene i et resonnement som i hovedsak er dekket ved formuleringene i avsnitt 6.

Eksempel

Ved anvendelser av rangkriteriet for identifikasjon er det unødvendig å ordne linjer og kolonner i en bestemt rekkefølge, slik det var hensiktsmessig å gjøre i formlene. Et eksempel vil illustrere hvordan en kan gå fram. Vi låner fra Malinvauds lærebok (kap. 16), følgende matrise av strukturkoeffisienter (matrisen $[BCD]$, når 3 "tomme" kolonner utelates):

$$A = \begin{bmatrix} -1 & \beta_{12} & \beta_{13} & 0 & 0 & \gamma_1 & 0 & \lambda_1 & \delta_{13} & 0 \\ -1 & \beta_{22} & 0 & \beta_{24} & 0 & \gamma_2 & 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & \gamma_{32} & \lambda_3 & \delta_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & \beta_{45} & \gamma_4 & 0 & \lambda_4 & 0 & \delta_{45} \\ 0 & \beta_{52} & 0 & 0 & -1 & \gamma_5 & 0 & \lambda_5 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Modellen har 5 endogene og 5 predeterminerte variable, dvs. $n = 5$ og $m = 5$. Vi velger å undersøke rangkriteriet for strukturlikning nr. 5. Det er utelatt 3 endogene og 3 predeterminerte variable fra denne likningen. Vi trekker ut matrisen av kolonner som har nullelementer i 5. linje. Den er

$$A_2 = \begin{bmatrix} -1 & \beta_{13} & 0 & 0 & \delta_{13} & 0 \\ -1 & 0 & \beta_{24} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \gamma_{32} & \delta_{33} & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & \delta_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Det er selvsagt bare elementene i de 4 første linjene som har betydning for rangen til A_2 . Vi må undersøke om minst 1 av de $\binom{6}{2} = 15$ 4-radete determinanter som kan dannes ved etter tur å utelate 2 av de 6 kolonnene, har verdi forskjellig fra null. Vi velger først å se på en som gir svært enkel algebra, dannet av kolonnene 2, 3, 4 og 6 (med 5. linje utelatt). Vi har

$$\begin{vmatrix} \beta_{13} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_{24} & 0 & 0 \\ -1 & 0 & \gamma_{32} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \delta_{45} \end{vmatrix} = \beta_{13} \beta_{24} \gamma_{32} \delta_{45}.$$

Nullrestriksjonene på strukturkoeffisientene i modellen medfører ikke at denne determinantverdien blir null. Konklusjonen er at A_2 , ut fra a priori kriterier, har rang $n-1 = 5-1 = 4$, og at likning nr. 5 er identifiserbar.

8. Tolkinger av identifikasjonskriteriene; transformasjoner; koeffisientlikhetsrestriksjoner.

Romgeometriske illustrasjoner er nyttige hjelpemidler til å forstå identifikasjonsproblemets karakter. Dette gjelder ikke bare i de enkleste tilfellene når modellens relasjoner (uten restledd) kan presenteres som linjer i et plan, eller som plan i et tredimensjonalt rom, men også mer generelt og abstrakt, når relasjonene oppfattes som hyperplan i et rom av større dimensjon enn tre. Vi forutsetter at de vanligste grafiske illustrasjoner av likninger i to og tre dimensjoner er kjent. De kommentarer vi skal gi til en romgeometrisk tolking av identifikasjonskriteriene, vil dels ha tilknytning til slike illustrasjoner.

De former kriteriene for identifiserbarhet av en strukturel relasjon er gitt i avsnittene 6 og 7, kan transformeres til en form som kanskje bedre svarer til geometriske illustrasjoner. Vi skal ta for oss slike transformasjoner. Men først ser vi på den geometriske tolking av de etablerte kriterier i tilknytning til en algebraisk svært enkel modell med to likninger. Den har, når normaliseringsbetingelser og nullrestriksjoner er pålagt, formen

$$(8.1) \quad x_1 - \beta_{12}x_2 = u_1$$

$$(8.2) \quad -\beta_{21}x_1 + x_2 - \gamma_{21}z_1 = u_2$$

(For å gi modellen et visst preg av realisme kan x_1 , x_2 og z_1 oppfattes som *a v v i k* fra kjente nivå-tall, slik at $x_1 = x_2 = z_1 = 0$ samtidig med at $u_1 = u_2 = 0$ betyr at nivå-tallene gir en løsning på systemet "på eksakt form".) Den stokastiske hypotese er at

$$(8.3) \quad E u_i = 0; \quad E(u_i u_j) = \sigma_{ij}; \quad (i, j = 1, 2)$$

for alle verdier av z_1 ; det er altså ingen a priori restriksjoner på elementene i kovariansmatrisen for de restleddsvariable, Σ . Den reduserte form, som eksisterer når $1 - \beta_{21}\beta_{12} \neq 0$, er

$$(8.4) \quad x_1 = \Pi_{11}z_1 + \varepsilon_1$$

$$(8.5) \quad x_2 = \Pi_{21}z_1 + \varepsilon_2,$$

$$\Pi_{11} = \frac{\beta_{12}\gamma_{21}}{1 - \beta_{21}\beta_{12}}$$

$$\Pi_{21} = \frac{\gamma_{21}}{1 - \beta_{21}\beta_{12}}$$

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{1 - \beta_{21}\beta_{12}} (u_1 + \beta_{12}u_2)$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{1 - \beta_{21}\beta_{12}} (\beta_{21}u_1 + u_2)$$

Det er ikke utelatt noen variable i (8.2), som derfor ikke er identifiserbar. Likning (8.1) er identifiserbar; matrisen $\Pi(n_1, m_2)$ - jfr. foregående avsnitt - som her er identisk med en kolonnevektor med de to elementer Π_{11} og Π_{21} , har rang lik $(n_1 - 1) = 1$. (Alternativt, matrisen $[B_2C_2]$ består her av en kolonnevektor med de to elementer 0 og γ_{21} , og har rang lik $(n-1) = 1$). Rangbetingelsen er oppfylt fordi γ_{21} er antatt å være forskjellig fra null.

I et (x_1, x_2) -diagram vil, for $u_1 = u_2 = 0$, (8.1) være en rett linje gjennom origo, og det vil også (8.2) være når modellens eksogene variable, z_1 , har verdien null; for varierende verdier av z_1 blir (8.2), når $\gamma_{21} \neq 0$, representert ved en skare av parallelle linjer (tegn figur!). Det er da en selvsagt forutsetning (som vi generelt har tatt forbehold om jfr. (5.4)) at z_1 , som her er en "avviksvariabel", må kunne anta andre verdier enn null. Geometrisk er det da klart at

betingelsen $\gamma_{21} \neq 0$ er nødvendig og tilstrekkelig for at (8.2) skal representere flere linjer enn den som går gjennom origo, og dermed også for at (8.2) skal kunne ha ett eller flereskjæringspunkter med (8.1) utenom origo. Med kjennskap til minst ett skjæringspunkt utenom origo vil den rette linje som (8.1) representerer (uten restledd), være bestemt. De nødvendige tilføyelser for å dekke tilfellet med stokastisk varierende restledd følger ved samme resonnement som i avsnitt 2. En liknende geometrisk tolking av større systemer kunne baseres på "den (n-1)-reduerte form", med referanse til et $(n_1 + m_1)$ -dimensjonalt rom. Diskusjonen av systemene (6.22) og (6.23) antyder resonnementets karakter.

Det forhold at (8.2) ikke er identifiserbar, kommer klarere fram når (8.1) og (8.2) framstilles som plan i et tredimensjonalt rom. Den rette linje i rommet som dannes der de to planene skjærer hverandre, er - i det eksakte tilfelle - det geometriske sted for de (x_1, x_2, z_1) -verdier som tilfredsstiller begge relasjonene. Denne linje i rommet, parameterframstilt ved (8.4)-(8.5), er alt som kan bestemmes "fra data" (i det eksakte tilfelle). Kjennskapet til beliggenheten av denne linjen sier oss nok til å bestemme planet (8.1), fordi dets helning i z_1 -retning er kjent a priori (vinkelkoeffisient lik null), men ikke nok til å bestemme planet (8.2), fordi vi ikke har noen ekstra informasjon om det, utover at det inneholder linjen.

Med utgangspunkt i denne siste betraktningmåten er det av interesse å ha en forestilling om alle plan med den egenskap at de går gjennom linjen i rommet bestemt (i det eksakte tilfelle) av den reduserte form (8.4) - (8.5). Det er intuitivt klart at det må finnes et uendelig antall plan med denne egenskap, og at alle slike plan kan genereres ved å foreta en kontinuerlig dreining over 180 grader av et plan som har linjen i rommet som fast akse. Men bare to av disse planene er "de riktige", de som "har laget" skjæringslinjen.

Hvis vår informasjon er begrenset til at linjen i rommet er blitt bestemt som skjæringslinjen mellom to plan, så er dette utilstrekkelig til å få klarlagt hvilke to plan, selv om beliggenheten av linjen i rommet er kjent. Ytterligere a priori informasjon er nødvendig for å bestemme ett av dem, eller begge. Vi merker oss at vi har utilstrekkelig informasjon selv om alle plan som går gjennom skjæringslinjen, u n n t a t t t o, kan utelukkes. Vi må også vite hvilket av dem som svarer til (8.1) og hvilket som svarer til (8.2).

For å bringe orden i problemstillingen er det nyttig å innføre mengden M av alle planpar som (i det eksakte tilfelle) har den gitte linje i rommet som skjæringslinje. Planparene må oppfattes som ordnede par, der plan nr. 1 er tilordnet første strukturlikning og plan nr. 2 er tilordnet annen strukturlikning.

Videre innfører vi to delmengder av M . Vi lar M^1 være den delmengden som består av alle planpar i M der plan nr. 1 tilfredsstiller de a priori restriksjoner som er pålagt koeffisientene i (8.1). Tilsvarende lar vi M^2 være den delmengden som består av alle planpar i M der plan nr. 2 tilfredsstiller de a priori restriksjoner som er pålagt koeffisientene i (8.2). Den informasjon vi har om plan nr. 1, fra den reduserte form og a priori, kan da sammenfattes til at plan nr. 1 tilhører et planpar i M^1 . Analogt gjelder det for plan nr. 2 at det må tilhøre et planpar i M^2 .

Dette leder til følgende betingelse for identifiserbarhet: Det er nødvendig og tilstrekkelig for identifiserbarhet av plan nr. i at alle (ordnede) planpar i M^i har ett og samme plan som plan nr. i ($i = 1, 2$).

Denne geometriske formuleringen av identifikasjonsbetingelsene har den fordel at den gir et godt tankebilde av den informasjon som ligger i den reduserte form, og av den informasjon vi har alt i alt

(fra den reduserte form og fra a priori restriksjoner). En overføring til algebraisk form har derfor interesse. Sammenliknet med tidligere formuleringer innebærer en slik overføring at vi må innføre mengder av matriser som korresponderer med de mengdene av planpar som ble innført ovenfor.

Vi registrerer i denne sammenheng at en normalisering av koeffisientene i en relasjon er uten betydning for lokaliseringen i rommet av det plan relasjonen representerer; restriksjonene som relasjonen legger på variabelverdiene, er upåvirket av normaliseringen. Algebraen blir greiest om vi spesifiserer separat normaliseringsbetingelsene på (8.1) og (8.2), og nullrestriksjonen på koeffisienten for z_1 , γ_{11} , i (8.1). Koeffisientmatrisen for (8.1) - (8.2), før restriksjoner er pålagt, lar vi være representert ved

$$(8.6) \quad [B^0 C^0] = \begin{bmatrix} \beta_{11}^0 & \beta_{12}^0 & \gamma_{11}^0 \\ \beta_{21}^0 & \beta_{22}^0 & \gamma_{21}^0 \end{bmatrix}$$

og apriori-restriksjonene er

$$(8.7) \quad \gamma_{11}^0 = 0; \quad \beta_{11}^0 = -1; \quad \beta_{22}^0 = -1.$$

For tydelighets skyld markerer vi nå ved toppskrift o at koeffisientene står for de "sanne" verdier av relasjonenes parametre. Dersom alle koeffisientene i (8.6) var kjent, ville vi ha full informasjon om beliggenheten både av "det sanne planet (8.1)", og av "det sanne planet (8.2)". Vi er sikret at de to plan ikke er sammenfallende eller parallelle, i og med at matrisen B^0 er antatt å være ikke-singulær. Den reduserte form (8.4) - (8.5), avledet fra sanne strukturcoeffisienter, representerer de punkter som er felles for de to planene, altså skjæringslinjen. Heretter markerer vi også denne redusert form-matrisen (som i vårt eksempel er en kolonnevektor) og dens elementer med toppskrift o.

For å komme fram til et algebraisk uttrykk for planpar som har samme skjæringslinje som de sanne planparene, premultipliserer vi matrisen (8.6) med en ikke-singulær matrise

$$(8.8) \quad \Lambda^k = \begin{bmatrix} \lambda_{11}^k & \lambda_{12}^k \\ \lambda_{21}^k & \lambda_{22}^k \end{bmatrix} \quad ; \quad (\lambda_{11}^k \lambda_{22}^k - \lambda_{21}^k \lambda_{12}^k \neq 0),$$

der elementene i Λ^k står for et valgt sett av tall og k markerer det valgte sett. Derved framkommer matrisen

$$(8.9) \quad [B^k C^k] = \Lambda^k [B^0 C^0]$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda_{11}^k \beta_{11}^0 + \lambda_{12}^k \beta_{21}^0 & \lambda_{11}^k \beta_{12}^0 + \lambda_{12}^k \beta_{22}^0 & \lambda_{11}^k \gamma_{11}^0 + \lambda_{12}^k \gamma_{21}^0 \\ \lambda_{21}^k \beta_{11}^0 + \lambda_{22}^k \beta_{21}^0 & \lambda_{21}^k \beta_{12}^0 + \lambda_{22}^k \beta_{22}^0 & \lambda_{21}^k \gamma_{11}^0 + \lambda_{22}^k \gamma_{21}^0 \end{bmatrix},$$

som kan tolkes som en koeffisientmatrise for et system med to likninger avledet av (8.1) - (8.2) ved lineære operasjoner.¹⁾

(Første likning er dannet ved å multiplisere (8.1) med

λ_{11}^k og (8.2) med λ_{12}^k , og så ta summen av dem, og annen likning er

dannet på samme måte med λ_{11}^k og λ_{12}^k erstattet av λ_{21}^k og λ_{22}^k ; rest-

leddene vil da bli transformert til henholdsvis $(\lambda_{11}^k u_1 + \lambda_{12}^k u_2)$ og

$(\lambda_{21}^k u_1 + \lambda_{22}^k u_2)$, med stokastiske egenskaper analoge med u_1 og u_2). Det

skulle uten videre være klart at de avledede to likninger må ha samme

reduuerte form som de opprinnelige to likninger. Transformasjonen består

jo bare i slike operasjoner på likningssystemet som brukes for "å løse"

det. På matriseform, når det opprinnelige systemet er

$$(8.10) \quad B^0 x + C^0 z + u = 0,$$

vil det transformerte systemet være

1) Med koeffisienter som i (8.6) kan (8.1) - (8.2) skrives:

$$\beta_{i1}^0 x_1 + \beta_{i2}^0 x_2 + \gamma_{i1}^0 z_1 + u_i = 0; \quad i = 1, 2.$$

$$(8.11) \quad (\Lambda^k_{B^0})_x + (\Lambda^k_{C^0})_z + \Lambda^k_u = 0,$$

der $(\Lambda^k_{B^0}) = B^k$ og $(\Lambda^k_{C^0}) = C^k$. Siden Λ^k er forutsatt å være ikke-singulær, vil også B^k være ikke-singulær, og den reduserte form for det transformerte systemet følger ved å premultiplisere alle ledd i (8.11) med $(B^k)^{-1} = (\Lambda^k_{B^0})^{-1} = (B^0)^{-1} (\Lambda^k)^{-1}$. Vi får

$$(8.12) \quad x = - (B^0)^{-1} C^0_z - (B^0)^{-1} u \\ = \Pi^0_z + \varepsilon,$$

som er identisk med den reduserte form av det opprinnelige systemet (8.10).

Kovariansmatrisen for den reduserte form (8.12) betegner vi Ω^0 , med elementene ω^0_{ij} , definert som i (5.2). Toppskriften 0 markerer at matrisen er utledet fra (8.10), men resonnementet ovenfor viser at Ω^0 er felles for alle systemer av formen (8.11).

Alle matriser $[B^k C^k]$ som kan skrives på formen (8.9) (der k som toppskrift markerer et bestemt tallsett for elementene), er altså mulige kandidater til å være strukturcoeffisientmatriser for (8.1) - (8.2), så lenge den eneste opplysning som foreligger om strukturlikningene, er at de har den reduserte form (8.12). Men finnes det under denne forutsetningen andre mulige kandidater til å være coeffisientmatriser for (8.1) - (8.2) enn de som kan skrives på formen (8.9)?

La B^{**} være en ikke-singulær, men ellers vilkårlig, coeffisientmatrise for likningssystemets endogene variable, og la $[B^{**} C^{**}]$ være coeffisientmatrisen for alle variable i systemet (med C^{**} vilkårlig). Betingelsen for at denne coeffisientmatrisen skal gi likningssystemet den reduserte form (8.12) er at

$$(8.13) \quad (B^*)^{-1}C^* = (B^0)^{-1}C^0 = -\Pi^0.$$

Under denne betingelsen eksisterer en matrise

$$(8.14) \quad \Lambda^* = B^*(B^0)^{-1}.$$

Denne transformerer $[B^0 C^0]$ ved (8.9) til $[B^* C^*]$. Vi får derfor direkte at $\Lambda^* B^0 = B^*$; videre har vi $\Lambda^* C^0 = B^*(B^0)^{-1}C^0 = B^*(B^*)^{-1}C^* = C^*$.

Alle ikke-singulære koeffisientmatriser som gir likningssystemet den reduserte form (8.12), kan altså skrives på formen (8.9).

Ved (8.7) ble en koeffisient i hver strukturlikning, β_{11}^0 og β_{22}^0 , normalisert til -1. For det transformerte systemet (8.11), der koeffisientmatrisen har formen (8.9), foretar vi samme normalisering av de korresponderende elementer, altså

$$(8.15) \quad \beta_{11}^k = \beta_{22}^k = -1.$$

Normaliseringene gir via (8.9) to restriksjoner på elementene i matrisen Λ^k . Vi får betingelsene:

$$(8.16) \quad \lambda_{11}^k = 1 + \beta_{21}^0 \lambda_{12}^k$$

$$(8.17) \quad \lambda_{22}^k = 1 + \beta_{12}^0 \lambda_{21}^k,$$

og innsatt i (8.9) gir dette følgende matrise av transformerte koeffisienter etter normalisering:

$$(8.18) \quad \begin{bmatrix} -1 & \beta_{12}^0 - (1 - \beta_{21}^0 \beta_{12}^0) \lambda_{12}^k & \gamma_{11}^0 + (\beta_{21}^0 \gamma_{11}^0 + \gamma_{21}^0) \lambda_{12}^k \\ \beta_{21}^0 - (1 - \beta_{21}^0 \beta_{12}^0) \lambda_{21}^k & -1 & \gamma_{21}^0 + (\gamma_{11}^0 + \beta_{12}^0 \gamma_{21}^0) \lambda_{21}^k \end{bmatrix}$$

Med normaliseringsbetingelser som i (8.18) ser vi sammenhengen mellom mengden av alle matriser av formen (8.9) og mengden M av alle planpar som har en felles skjæringslinje gitt ved (8.12). Ethvert reelt tallpar $(\lambda_{12}, \lambda_{21})$ tilsvarende et bestemt planpar, og omvendt. (Toppskrift k for λ_{12} og λ_{21} , markerer et bestemt element i denne mengden). Verdien 0 for λ_{12} (som innebærer at $\lambda_{11} = 1$) betyr at første likning står for det sanne plan nr. 1. Analogt betyr verdien 0 for λ_{21} at annen likning står for det sanne plan nr. 2. Andre verdier for λ_{12} og λ_{21} , betyr at likningene står for andre planpar. (Merk at $(1 - \beta_{21}^0 \beta_{12}^0)$ er determinanten til den ikke-singulære matrisen B^0).

Vi innfører nå i det transformerte systemet de a priori restriksjoner som ved (8.7) er pålagt strukturcoeffisientene i første likning. Vi skal ha $\gamma_{11}^0 = 0$, og vi krever at det korresponderende element γ_{11}^k i den transformerte og normaliserte matrise (8.18) også skal være null,

$$(8.19) \quad \gamma_{11}^k = \gamma_{11}^0 + (\beta_{21}^0 \gamma_{11}^0 + \gamma_{21}^0) \lambda_{12}^k = 0 + \gamma_{21}^0 \lambda_{12}^k = 0.$$

For at (8.19) skal være oppfylt, må vi ha at $\lambda_{12}^k = 0$ (og via (8.16) at $\lambda_{11}^k = 1$). Til delmengden M^1 av planpar der plan nr. 1 tilfredsstiller koefisientrestriksjonene på første strukturlikning, svarer derfor tallpar av formen $(0, \lambda_{21})$, der λ_{21} er vilkårlig (mens første element er λ_{12} satt lik null). Alternativt kan dette uttrykkes ved at matrisen Λ , når normaliseringen i (8.18) er foretatt, må ha formen

$$(8.20) \quad \Lambda = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} \end{bmatrix},$$

der λ_{21} og λ_{22} er pålagt restriksjonen (8.17), men ellers er vilkårlige.

Det er ingen a priori restriksjoner på koeffisientene i annen strukturlikning. Delmengden M^2 blir derfor sammenfallende med mengden M ; det er ingen andre restriksjoner på matrisen Λ enn de som normaliseringsbetingelsene pålegger. Disse er uttrykt ved (8.16) - (8.17).

Resonnementet ovenfor innebærer at mengdene M^1 og M^2 , opprinnelig innført som mengder av planpar, kan tolkes som mengder av matriser av formen (8.9), pålagt normaliseringsrestriksjoner og pålagt a priori restriksjoner på strukturkoeffisientene henholdsvis i matrisens første og annen linje.

Resonnementet innebærer derfor også at strukturrelasjon nr. i , ($i = 1, 2$), er identifiserbar hvis, og bare hvis, a priori-restriksjonene og normaliseringsbetingelsen på koeffisientene i strukturrelasjon nr. i medfører at linje nr. i i matrisen Λ har diagonalelementet $\lambda_{ii} = 1$ og alle de øvrige elementer lik null. Hvis, og bare hvis, denne betingelsen er oppfylt, har alle matriser av formen (8.9) de samme koeffisienter ($\beta_{i1}^0, \beta_{i2}^0, \gamma_{i1}^0$) som elementer i likning nr. i .

Presentasjonen forenkles noe hvis normaliseringsbetingelsene behandles på en litt annen måte. Hvis $[B^k C^k]$ er den ikke-normaliserte form, vil en normalisert form kunne uttrykkes ved $D^k [B^k C^k]$, der D^k er en diagonalmatrise. (Eksempel: Diagonalelementene i D^k er satt lik $(1/\beta_{ii}^k)$, for $i = 1, 2$). Analogt vil $D^0 [B^0 C^0]$ representere en normalisert form av $[B^0 C^0]$. Etter normalisering vil (8.9) derfor ha formen:

$$(8.21) \quad D^k [B^k C^k] = D^k \Lambda^k [B^0 C^0] = (D^k \Lambda^k (D^0)^{-1}) D^0 [B^0 C^0].$$

Normaliseringen påvirker altså Λ -matrisen via en premultiplikasjon og en postmultiplikasjon med diagonale matriser. Anvendt på matriser e t t e r normalisering var kriteriet for identifiserbarhet av likning nr. i at Λ -matrisens linjenr. i skulle ha $\lambda_{ii} = 1$,

med linjens øvrige elementer lik null. Et likeverdig kriterium anvendt på matriser før normalisering er at $\lambda_{ii} \neq 0$ (men ellers vilkårlig), med linjens øvrige elementer lik null. Dette følger av (8.21).

Generalisering til et vilkårlig antall likninger og variable i modellen er vesentlig et spørsmål om definisjonen av matrisene (linjetall og kolonnetall) og i noen grad om terminologi (tallpar generaliseres f.eks. til n-vektorer). Det er, som i tidligere opplegg, tilstrekkelig å presentere identifikasjonskriteriet for første strukturrelasjon; den relasjon som undersøkes, kan alltid settes som første relasjon. Istedenfor (8.1) - (8.2) innfører vi det generelle systemet i n variable $Bx + Cz + v = 0$, der v står for n-vektoren av restleddsvariable. (Det vil gå fram av det følgende hvorfor vi her skifter over fra u til v som betegnelse for restleddene). Vi splitter først matriser og variable som i (7.1.c), side 71, og får

$$B_1 x_1 + B_2 x_2 + C_1 z_1 + C_2 z_2 + v = 0,$$

der x_2 og z_2 står for henholdsvis endogene og eksogene variable som er utelatt i første likning. Som i (7.1.c.) sammenfatter vi ledd som inneholder (endogene og eksogene) variable utelatt i første likning til

$$A_2 y_2 = B_2 x_2 + C_2 z_2,$$

der $A_2 = [B_2 C_2]$, og der y_2 sammenfatter kolonnevektorene x_2 og z_2 i en kolonnevektor med $(n_2 + m_2)$ elementer. Dessuten sammenfatter vi de ledd som inneholder ikke-utelatte (endogene og eksogene) variable i første likning til

$$A_1 y_1 = B_1 x_1 + C_1 z_1,$$

der $A_1 = [B_1 C_1]$, og der y_1 sammenfatter kolonnevektorene x_1 og z_1 i en kolonnevektor med $(n_1 + m_1)$ elementer.

Etter denne omordningen går systemet av n strukturelasjoner over til

$$(8.22) \quad A_1 y_1 + A_2 y_2 + v = 0.$$

Det kan ytterligere sammentrekkes til

$$(8.23) \quad Ay + v = 0$$

ved å innføre $A = [A_1 A_2]$ og kolonnevektoren y som består av de $(n_1 + m_1) + (n_2 + m_2) = (n + m)$ elementene i y_1 og y_2 . Koeffisientmatrisen A (uten noen toppskrift) oppfattes her som et vilkårlig element fra mengden av matriser som kan uttrykkes på formen

$$(8.24.a) \quad A = [A_1 A_2] = \Lambda [A_1^0 A_2^0] = \Lambda A^0,$$

der Λ er den ikke-singulære matrisen fra (8.8), nå med n linjer og kolonner, og $A^0 = [A_1^0 A_2^0]$ står for matrisen av sanne strukturkoeffisienter før normalisering. (Vi trenger nå toppskriftmarkering bare for A^0). Restleddet v oppfattes som definert ved transformasjonen

$$(8.24.b) \quad v = \Lambda u$$

Alle koeffisientmatriser av formen (8.24.a) gir da likningssystemet

(8.23) den samme reduserte form, spesifisert som i (8.12).

Matrisen A^0 har etter sin definisjon bare nullelementer i første linje i sin delmatrise A_2^0 . En matrise A , definert ved (8.24.a), men ellers vilkårlig, må ha alle elementer i første linje i sin

delmatrise A_2 lik null for å komme i betraktning som en mulig kandidat til å være en strukturcoeffisientmatrise. Men mellom A_2^0 og A_2 gjelder ifølge (8.24.a) matriselikningen

$$(8.25) \quad A_2 = \Lambda A_2^0.$$

Derfor fører nullrestriksjonene på A_2 og A_2^0 til visse restriksjoner på matrisen Λ . Disse restriksjonene berører bare første linje i A_2 og første linje i matriseproduktet ΛA_2^0 . Uttrykt i vanlig algebra gir første linje i (8.25) sammenhengen

$$(8.26) \quad a_{1s} = \lambda_{11} a_{1s}^0 + \sum_{j=2}^n \lambda_{1j} a_{js}^0; \quad (s = 1, 2, \dots, n_2 + m_2).$$

Her står a_{1s} og a_{1s}^0 for elementene henholdsvis i første linje i A_2 og i første linje i A_2^0 ; fotskriften s markerer nummereringen av kolonnene i A_2 og A_2^0 . Restriksjonene er at alle a_{1s} og a_{1s}^0 er lik null. Innsatt i (8.26) gir dette ingen restriksjoner på elementet λ_{11} . Men elementene $\lambda_{12}, \lambda_{13}, \dots, \lambda_{1n}$ må tilfredsstille følgende system av $(n_2 + m_2)$ lineære likninger:

$$(8.27) \quad \sum_{j=2}^n \lambda_{1j} a_{js}^0 = 0; (s = 1, 2, \dots, n_2 + m_2).$$

I tilknytning til (8.21) - som gjelder for vilkårlige verdier av n og m - kom vi til følgende kriterium for identifiserbarhet av en strukturrelasjon, her anvendt på første relasjon før normalisering: Vi må ha $\lambda_{11} \neq 0$, men ellers vilkårlig, og $\lambda_{12} = \lambda_{13} = \dots = \lambda_{1n} = 0$. Dette kriteriet følger nå av nullrestriksjonene på første likning i delmatriselikningen

$$(8.28) \quad A_1 = \Lambda A_1^0.$$

Første likning i (8.28), uttrykt i vanlig algebra, kan skrives på formen (8.26), med a-koeffisientene hentet fra A_1 og A_1^0 . Fotskriftens markerer da nummereringen fra 1 til $(n_1 + m_1)$ av kolonnene i A_1 og A_1^0 . Det er ingen a priori-restriksjoner på noen av a_1 -koeffisientene fra A_1 og A_1^0 . Ved denne tolkningen følger det direkte av (8.26) at elementene a_{1s} fra A_1 vil være proporsjonale med elementene a_{1s}^0 fra A_1^0 (med proporsjonalitetsfaktor forskjellig fra null) hvis, og bare hvis, $\lambda_{11} \neq 0$ og $\lambda_{12} = \lambda_{13} = \dots = \lambda_{1n} = 0$.

Den informasjon om $\lambda_{12}, \lambda_{13}, \dots, \lambda_{1n}$ som a priorirestriksjonene på strukturkoeffisientene i første likning gir, er uttrykt ved (8.27), med a_{js}^0 -koeffisientene hentet fra A_2^0 . For å bestemme de $(n-1)$ størrelsene $\lambda_{12}, \lambda_{13}, \dots, \lambda_{1n}$ må (8.27) inneholde minst $(n-1)$ likninger. Tallet på likninger i (8.27) er lik tallet på kolonner i A_2 , som igjen er lik tallet på utelatte (endogene og eksogene) variable i første strukturrelasjon, altså $(n_2 + m_2)$. Av dette følger den fra tidligere kjente nødvendige betingelse, $(n_2 + m_2) \geq (n-1)$, for identifiserbarhet av første strukturrelasjon ("telleregelen").

Siden (8.27) er et lineært h o m o g e n t system, er verdien null for alle λ -ene alltid en løsning (uansett tallet på likninger og uansett verdiene for a^0 -koeffisientene). Men nullverdier vil være d e n e n e s t e løsning bare hvis koeffisientmatrisen i (8.27) har rang lik $(n-1)$. Denne matrisen skiller seg fra A_2^0 bare ved at første linje i A_2^0 , som bare inneholder nuller, er utelatt. Av dette følger at den har samme rang som A_2^0 . Derfor er kriteriet

(i) første linje i (n, n) -matrisen Λ har første element

$$\lambda_{11} \neq 0 \text{ og } \lambda_{12} = \lambda_{13} = \dots = \lambda_{1n} = 0$$

og kriteriet

(ii) matrisen $A_2^0 = [B_2^0 C_2^0]$ har rang lik $(n-1)$

likeverdige. Tidligere - i avsnitt 7 - har vi vist at (ii) er likeverdige med at

(iii) delmatrisen $\Pi(n_1, m_2)$ fra redusert form - matrisen

$\Pi(n, m)$ har rang lik (n_1-1) .

De tre kriteriene uttrykker på forskjellige, men likeverdige, måter nødvendige og tilstrekkelige betingelser for at første strukturrelasjon er identifiserbar (når det ikke er lagt restriksjoner på Σ -matrisen).

Vi merker oss at det er en vesentlig forskjell mellom begrepsgrunnlaget for kriterium (i) og begrepsgrunnlaget for kriteriene (ii) og (iii). Uttrykt i terminologien fra dette avsnitt er kriteriene (ii) og (iii) basert på egenskaper ved den samme strukturkoeffisientmatrisen A^0 og på egenskaper ved redusert form-matrisen Π^0 , som er avledet fra A^0 ; problemstillingen er om vi har, eller ikke har, tilstrekkelig informasjon (fra data og i form av a priori restriksjoner) til å bestemme visse elementer i A^0 . Ved kriterium (i) er begrepsgrunnlaget utvidet på en slik måte at alle matriser som tilfredsstiller de samme a priori betingelser som er pålagt elementene i A^0 , og som har samme reduserte form Π^0 , er kommet med. Den geometriske tolkingen som er gitt av A^0 og av transformasjonen ΛA^0 , konkretiserer innholdet i disse synspunktene.

Med systemet (8.23) som utgangspunkt, der $A = \Lambda A^0$, vil også a priori restriksjoner på elementene i kovariansmatrisen for restledds-

vektoren $v = \Lambda u$ komme til uttrykk som betingelser på Λ -matrisen.

Innfører vi Σ^0 som betegnelse for den sanne kovariansmatrisen, altså $\Sigma^0 = E(uu')$, følger det av (8.24.b) at

$$(8.29) \quad \Sigma = E(vv') = E(\Lambda uu' \Lambda') = \Lambda E(uu') \Lambda' = \Lambda \Sigma^0 \Lambda'.$$

Hvis noen av elementene i Σ^0 er pålagt a priori restriksjoner, må de korresponderende elementer i mengden av Σ -matriser som er mulige kandidater til å være kovariansmatriser, pålegges de samme a priori restriksjoner. Derfor fører a priori restriksjoner på Σ (og Σ^0) til betingelser på matrisen Λ via (8.29). Hver a priori restriksjon gir én betingelse på elementene i Λ -matrisen i form av én likning, som er av 2. grad i λ -elementene.

Med utgangspunkt i de begreper og definisjoner som er innført i dette avsnitt kan spørsmålet om identifikasjonsegenskapene til et lineært system av strukturrelasjoner presenteres i en kompakt og presis terminologi.¹⁾ Systemet av strukturrelasjoner uttrykker vi på formen (8.23).

Med systemet av sanne strukturrelasjoner vil vi forstå følgende spesielle form av (8.23):

1) Terminologien er stort sett fra tidlige arbeider på feltet av Koopmans og andre, bl.a. T.C. Koopmans, Identification Problems in Economic Model Construction, *Econometrica*, April 1949, og T.C. Koopmans (ed.), Statistical Inference in Dynamic Economic Models, Cowles Commission Monograph No. 10, Wiley, N.Y. 1950.

$$(8.30) \quad A^0 y + u = 0,$$

der $Eu = 0$ og $E(uu') = \Sigma^0$. Matriseparet (A^0, Σ^0) kalles den sanneste struktur. Den består av et bestemt tallsett. Noen av elementene i (A^0, Σ^0) er pålagt a priori restriksjoner. De kan være a priori kjente tall (f.eks. bestemt av nullrestriksjoner) eller være a priori kjente funksjoner av andre elementer (f.eks. "like koeffisienter"). De øvrige elementene er a priori ukjente konstanter. Koeffisientene i hver linje i A^0 kan pålegges en normaliseringsbetingelse. Denne vil vanligvis bestå i at alle koeffisienter i vedkommende linje, og restleddet i den tilsvarende linje i vektoren u , multipliseres med en konstant. Det er greiest å uttrykke normalitetsbetingelsene separat, dvs. uten å trekke dem eksplisitt inn i formlene. Matrisen A^0 består av elementene fra de tidligere definerte matrisene B^0 og C^0 . Matrisen B^0 er ikke-singulær. Systemet (8.30) har den reduserte form (8.12), med parametre

$$\Pi^0 = -(B^0)^{-1}C^0 \quad \text{og} \quad \Omega^0 = E\varepsilon\varepsilon' = E(-(B^0)^{-1}u)(-(B^0)^{-1}u)' = (B^0)^{-1}\Sigma^0((B^0)^{-1})'.$$

Mer generelt bruker vi betegnelsen en struktur - eller, mer dekkende, en mulig (admissibel) struktur ("an admissible structure") - tilordnet formen (8.23) om ethvert matrisepar (A^k, Σ^k) som består av et bestemt tallsett, og som oppfyller følgende betingelser:

- (i) De samme a priori restriksjoner som er pålagt (A^0, Σ^0) , gjelder også for (A^k, Σ^k) .
- (ii) Det eksisterer en ikke-singulær matrise Λ^k slik at $A^k = \Lambda^k A^0$ og $\Sigma^k = \Lambda^k \Sigma^0 (\Lambda^k)'$.
- (iii) De samme normaliseringsbetingelser som er pålagt (A^0, Σ^0) , gjelder også for (A^k, Σ^k) .

De tre betingelsene sammenfatter på en algebraisk grei form all informasjon som vil være tilgjengelig om likningssystemets parametre, a priori og via den reduserte form.¹⁾ (Betingelsen (ii) sikrer at enhver mulig struktur gir (8.23) den reduserte form (8.12)). Vi merker oss at definisjonen ovenfor er slik at den samme struktur alltid er en mulig struktur. Dessuten merker vi oss at enhver struktur er en fullspesifisert teori i den forstand at alle innførte parametre er tilordnet en bestemt verdi. (Hvis vi, mer generelt, velger å karakterisere restleddenes stokastiske egenskaper ved flere, eller andre, parametre enn forventningene - her satt lik null - og kovariansmatrisen, må formuleringene ovenfor endres, men i hovedsak blir resonnementet av samme karakter, jfr. f.eks Malinvaud's lærebok, Ch. 18).

Begrepet en (linear) modell²⁾ er i denne sammenheng brukt som et samlebegrep for alle (admissible) strukturer, eller rettere, for et system av formen (8.23) når det er tilordnet mengden av alle strukturer. Kaller vi denne mengden for S , vil elementene i S være de matrisepar (A^k, Σ^k) som oppfyller betingelsene (i), (ii) og (iii) ovenfor.

Med utgangspunkt i de begrepene som nå er innført kan definisjonen av identifiserbarhet for en enkelt parameter tilhørende A eller Σ defineres på følgende måte:

En parameter er identifiserbar hvis den har samme verdi i alle strukturer i S . (dvs. hvis $a_{ij} = a_{ij}^0$, eller $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^0$, der parametre uten toppskrift tilhører en vilkårlig struktur i S).

Merk at betingelsen (iii) ovenfor, som uttrykker normaliseringsregelen

- 1) Istedenfor betegnelsene "mulige strukturer" eller "admissible strukturer" brukes også betegnelsene "ekvivalente strukturer" (bl.a. i Malinvaud's lærebok, Ch. 18) og "observasjonsmessig ekvivalente strukturer".
- 2) Siden betegnelsen "modell" er i vanlig bruk også i andre, ikke alltid klart presiserte, betydninger, er det grunn til å ta med definisjonen - eller å referere til den - når begrepet skal ha den bestemte tolking som er gitt her.

er viktig for denne definisjonen. Betingelser av formen $a_{ij} = a_{ij}^0$, eller $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^0$ har mening bare hvis normaliseringsregelen for likning nr. i i matriselikningen (8.23) er den samme for alle strukturer i S.

Det følger uten videre at definisjonen av identifiserbarhet for en hvilken som helst samling av parametre, f.eks. strukturcoeffisientene i en bestemt relasjon, kan baseres på definisjonen for en enkelt parameter.

Når det gjelder kriteriene for identifiserbarhet for det tilfellet vi vesentlig har behandlet tidligere, bringer ikke denne definisjonen inn noen nye synspunkter. Kriterier for identifiserbarhet av alle strukturcoeffisienter i en relasjon, når det ikke er noen a priori restriksjoner på Σ -matrisen, og når a priori restriksjonene på A-matrisen bare består av nullrestriksjoner, kan behandles tilfredsstillende uten å være basert på begrepene struktur og mengden S av strukturer. (Dette vil i praksis være de mest aktuelle tilfeller.) Vi registrerer i denne forbindelse bare, i tilknytning til (8.24.a), (8.26) og (8.27), at dersom elementene i linje nr. i i Λ -matrisen oppfyller betingelsene $\lambda_{ii} \neq 0$, $\lambda_{ij} = 0$ for $j \neq i$, så vil etter normalisering betingelsene $a_{is} = a_{is}^0$ være oppfylt for $s = 1, 2, \dots, (n + m)$, altså for alle elementer i linje nr. i av A og A^0 , der A og A^0 tilhører henholdsvis en vilkårlig struktur og den samme struktur i S.

Under de samme typer av a priori-restriksjoner følger det uten videre at betingelsene ovenfor utvidet til å gjelde for $i = 1, 2, \dots, n$ gir et kriterium for at alle strukturcoeffisienter i alle relasjoner er identifiserbare. Dette svarer til at Λ -matrisen må være en diagonalmatrise; ved samme normaliseringsregel for A og A^0 transformeres da Λ til enhetsmatrisen, jfr. (8.21).

Tilfeller da noen coeffisienter i en strukturrelasjon er identifiserbare, mens andre ikke er det, vil bare kunne forekomme for

nokså spesielle a priori-restriksjoner, f.eks. hvis forskjellige variable i forskjellige relasjoner er pålagt å ha identiske koeffisienter. Også slike restriksjoner kan uttrykkes som restriksjoner på Λ -matrisen, men det kan selvsagt ikke gis generelle regler for behandlingen av slike tilfeller.

Et tilfelle som nokså ofte forekommer, er det vi har kalt **k o e f f i s i e n t l i k h e t** i samme likning, f.eks. at den algebraiske sum av visse koeffisienter er lik null (mer spesielt: $a_{ih} = -a_{ik}$). Vi velger som eksempel en modell med 3 likninger, der første strukturrelasjon (uten markeringer av skillet mellom endogene og eksogene variable) er pålagt den restriksjon at $a_{12} = -a_{13} = \alpha$ (hvor α er ukjent), og videre at $a_{14} = 0$. Relasjonen får da formen

$$(8.31) \quad y_1 + \alpha y_2 - \alpha y_3 + 0 \cdot y_4 + u_1 = 0.$$

Koeffisientmatrisen for systemet (uten normalisering av de øvrige likninger) er altså

$$(8.32) \quad A = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & -\alpha & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}.$$

Ved en enkel variabeltransformasjon kan dette systemet overføres til en form der betingelsen om koeffisientlikhet kan uttrykkes som en nullrestriksjon. Ved å innføre

$$(8.33) \quad \begin{aligned} y_1^* &= y_1; & y_2^* &= y_2 - y_3; \\ y_3^* &= y_3; & y_4^* &= y_4 \end{aligned} ,$$

kan (8.31) transformeres til

$$(8.34) \quad y_1^* + \alpha y_2^* + 0 \cdot y_3^* + 0 \cdot y_4^* + u_1 = 0.$$

Når de samme transformasjoner brukes i de to øvrige likninger, finner en lett at koeffisientmatrisen for det transformerte systemet blir

$$(8.35) \quad A^* = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & (a_{22} + a_{23}) & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & (a_{32} + a_{33}) & a_{34} \end{bmatrix}$$

I dette transformerte systemet har første likning to nullrestriksjoner. Siden transformasjonene (8.33) er en-entydige og har kjente koeffisienter, kan kriterier for identifiserbarhet av koeffisientene i første strukturlikning utledes fra egenskapene til den transformerte koeffisientmatrise A^* . Vi danner delmatrisen

$$(8.36) \quad A_2^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ (a_{22} + a_{23}) & a_{24} \\ (a_{32} + a_{33}) & a_{34} \end{bmatrix}$$

og slutter at (8.31) er identifiserbar hvis, og bare hvis, matrisen A_2^* har rang lik $(n-1) = (3-1) = 2$. (Ved (8.26) - (8.27) får en overgangen til betingelser på første linje i Λ -matrisen).

Nullrestriksjoner og koeffisientlikhet i samme likning er spesialtilfeller av homogene lineære restriksjoner på koeffisientene i vedkommende likning. Vi skal se litt nærmere på det. Vi lar, som før, første likning være den som skal undersøkes. Den har koeffisientene

a_{1s} , der $s = 1, 2, \dots, (n + m)$, idet systemet forutsettes å bestå av n likninger i n endogene og m eksogene variable. Rekkefølgen av variable kan nå være vilkårlig, dvs. det er ikke nødvendigvis slik at de variable som er med i første likning, er plassert foran de som er utelatt. Vi innfører r for tallet på restriksjoner i alt, altså medregnet eventuelle restriksjoner utenom nullrestriksjonene. Det følger at $r \geq (n_2 + m_2)$, der $(n_2 + m_2)$ står for tallet på utelatte (endogene og eksogene)variable i første likning.

Med r homogene lineære restriksjoner på koeffisientene i første strukturlikning vil vi forstå følgende likningssystem

$$(8.37) \quad \sum_{s=1}^{n+m} a_{1s} \phi_{sh} = 0; \quad (h = 1, 2, \dots, r),$$

der koeffisientene ϕ_{sh} er kjente tall. De danner følgende restriksjonsmatrise:

$$(8.38) \quad \phi = \phi(n+m, r) = [\phi_1 \phi_2 \dots \phi_r] = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \dots & \phi_{1r} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \dots & \phi_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_{n+m,1} & \phi_{n+m,2} & \dots & \phi_{n+m,r} \end{bmatrix}.$$

I nest siste ledd i (8.38) har vi innført egne betegnelser for kolonnene i ϕ , kolonnevektorene ϕ_h ($h = 1, 2, \dots, r$).

Spesialtilfellet med bare nullrestriksjoner er karakterisert ved at kolonnevektorene $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_r$ står for visse av kolonnene i enhetsmatrisen $I = I(n+m, n+m) = [\delta_1 \delta_2 \dots \delta_{n+m}]$. Her står δ_h for en kolonnevektor med $(n+m)$ elementer $\delta_{1h}, \delta_{2h}, \dots, \delta_{(n+m)h}$, der $\delta_{hh} = 1$ og $\delta_{sh} = 0$ for $s \neq h$.

Når restriksjonene uttrykkes ved formen (8.37) kan rekkefølgen av de variable i systemet være vilkårlig. Hvis nullrestriksjonene gjelder koeffisienter for variable med numrene p, q, \dots, w , så skal restriksjonsmatrisen ϕ være $[\delta_p \delta_q \dots \delta_w]$. (Dersom systemet er ordnet slik at de $(n_2 + m_2)$ variable som er utelatt fra første likning kommer sist, vil restriksjonsmatrisen bestå av de siste $(n_2 + m_2)$ kolonnene i enhetsmatrisen).

Spesialtilfellet med en koeffisientlikhet av formen

$a_{1p} + a_{1q} = 0$ vil være uttrykt ved $\sum_s a_{1s} (\delta_{sp} + \delta_{sq}) = 0$, som svarer til å sette $\phi_{sh} = (\delta_{sp} + \delta_{sq})$; uttrykt i vektorbetegnelser: $\phi_h = \delta_p + \delta_q$.

Det følger uten videre hvorledes mer sammensatte tilfeller av koeffisientlikhet kan behandles. Vi bruker (8.37) med en definisjon av ϕ_{sh} som er tilpasset de foreliggende restriksjoner.

I eksemplet med (8.31) som første strukturrelasjon blir restriksjonene skrevet på formen (8.37) følgende:

$$(8.39) \quad \begin{aligned} a_{11} \cdot 0 + a_{12} \cdot 1 + a_{13} \cdot 1 + a_{14} \cdot 0 &= a_{12} + a_{13} = 0 \\ a_{11} \cdot 0 + a_{12} \cdot 0 + a_{13} \cdot 0 + a_{14} \cdot 1 &= a_{14} = 0. \end{aligned}$$

Restriksjonsmatrisen knyttet til (8.31) er altså her

$$(8.40) \quad \phi = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Vi har allerede vist - ved å gå via variabeltransformasjonene (8.33) - at rangkriteriet anvendt på matrisen A_2^* definert ved (8.36) gir en

nødvendig og tilstrekkelig betingelse for identifiserbarhet av (8.31). Det er nå lett å vise at det er unødvendig å innføre slike variabeltransformasjoner eksplisitt. Matrisemultiplikasjonen $A\Phi$ med A - pålagt alle restriksjoner i første linje - tatt fra (8.32) og Φ tatt fra (8.40) gir direkte

$$(8.41) \quad A\Phi = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ (a_{22} + a_{23}) & a_{24} \\ (a_{32} + a_{33}) & a_{34} \end{bmatrix} = A_2^*.$$

Denne matriselikningen inneholder $3 \times 2 = 6$ likninger. To av dem - de i første linje - er de samme som (8.39). De fire øvrige er identiteter i de a_{ij} -elementer som inngår; det er de samme elementer på begge sider av likhetstegnet. Derfor inneholder (8.41) nøyaktig de samme restriksjoner som (8.39). Men i tillegg transformerer (8.41) A til den matrisen A_2^* som identifikasjonskriteriet er knyttet til.

Generalisering til en A -matrise med vilkårlig linje- og kolonnetall er endefram. Hvis alle restriksjoner er nullrestriksjoner, er det selvsagt bare ekstra bryderi å innføre Φ -matrisen for å uttrykke disse. En direkte ekstrahering fra A av delmatrisen A_2 definert som i (7.1.c) er alt som skal til. Men ved restriksjoner i form av koeffisientlikhet (i samme likning) vil som regel innføring av Φ -matriser være verdt bryderiet. Andre former for homogene lineære restriksjoner enn de nevnte, vil sjelden forekomme.

Ved å innføre homogene lineære restriksjoner er klassen av tilfeller som kan behandles ved tidligere etablerte kriterier, utvidet

en del. Telleregelen, og dermed en viktig nødvendig betingelse for identifiserbarhet av en relasjon, kan overføres fra å gjelde tallet på nullrestriksjoner til å gjelde tallet på (uavhengige) homogene lineære restriksjoner. Det er en grei regel at enhver strukturrelasjon som er pålagt færre enn $(n-1)$ homogene lineære restriksjoner, og ingen andre restriksjoner, ikke er identifiserbar. Minimumstallet på slike restriksjoner som kreves for at alle strukturcoeffisienter i en modell skal være identifiserbare, er altså $n(n-1)$. Ved hjelp av denne regelen kommer vi f.eks. lett til den konklusjon at en modell med koeffisientmatrise $A = [B \ C]$, der B har triangulær form (dvs. der alle elementer på den ene side av hoveddiagonalen er lik null), uten at noen betingelser er pålagt matrisene C og Σ , ikke er identifiserbar. Tallet på restriksjoner er her bare halvparten av minimumstallet $n(n-1)$. (Bare en av relasjonene oppfyller betingelsen om $(n-1)$ restriksjoner).

De a priori betingelser på Σ -matrisen som oftest vil være aktuelle (når eventuelle lineære definisjonslikninger forutsettes å være eliminert), er at alle kovariansenelementene pålegges nullrestriksjoner, altså at Σ -matrisen har alle elementer utenom hoveddiagonalen lik null. Siden Σ er en symmetrisk (n, n) -matrise, vil tallet på slike restriksjoner da være $\frac{1}{2}n(n-1)$.

For å få oversikt over hvorledes restriksjoner på Σ -matrisen kan sammenholdes med restriksjoner på A-matrisen er det greiest å transformere begge disse typer av restriksjoner til restriksjoner som må gjelde for Λ -matrisen. Vi har sammenhengen, jfr. (8.29), $\Sigma = \Lambda \Sigma^0 \Lambda'$. Ved å pålegge at Σ^0 og Σ skal være diagonale matriser vil elementene i Λ -matrisen måtte tilfredsstille $\frac{1}{2}n(n-1)$ restriksjoner (som er homogene kvadratiske former). Tallet på restriksjoner på Λ -matrisen (som har n^2 elementer) blir altså det samme som tallet på restriksjoner pålagt elementene i Σ -matrisen (når $\sigma_{ij} = \sigma_{ji} = 0$ tolkes som en restriksjon). Dermed er det klart at en forutsetning om diagonal Σ -matrise

dekker akkurat halvparten av tallet på a priori restriksjoner som må gjelde for Λ -elementene for at alle parametre i modellen skal være identifiserbare.

En rekursiv modell med koeffisientmatrise $A = [B \ C]$ og kovariansmatrise Σ er karakterisert ved at B har triangular form, og ved at Σ er en diagonalmatrise. Denne kombinasjon av restriksjoner innebærer at Λ -matrikens elementer blir pålagt ialt $n(n-1)$ restriksjoner, jfr. tilfellene som er behandlet ovenfor. Det er forholdsvis lett å påvise at denne kombinasjon av restriksjoner innebærer at Λ -matrisen må være diagonal. Det følger av (8.24.a) at Λ må tilfredsstille matriselikningen $B = \Lambda B^0$, dvs. $\beta_{ij} = \sum_s \lambda_{is} \beta_{sj}^0$, der $\beta_{ij} = 0 = \beta_{ij}^0$ for $i > j$ (altså spesifisert slik at elementene under hoveddiagonalen er satt lik null). Av disse likningene følger at vi må ha $\lambda_{ij} = 0$ for $i > j$. Av (8.29) følger det da, med Σ og Σ^0 som diagonalmatriser, at vi må $\lambda_{ij} = 0$ for $i < j$. De gjenstående elementer er diagonalelementene λ_{ii} , som ikke blir pålagt noen betingelser. Konklusjonen er at en rekursiv modell, spesifisert som ovenfor, består av bare identifiserbare relasjoner. Denne konklusjonen følger imidlertid også av det vel etablerte resultat at minste kvadraters regresjon anvendt på likning nr. i , med x_i som avhengig variabel, gir konsistente estimatorer av relasjonens parametre, når modellen har rekursiv form.¹⁾

Ved å karakterisere de restleddsvariables sannsynlighetsfordeling bare ved forventningene, variansene og kovariansene har vi ingen direkte kontroll med de muligheter som eventuelt måtte foreligge for at identifiserbarhet av visse parametre kan avledes fra mer uttømmende informasjon (a priori eller fra data) om sannsynlighetsfordelingen. Slike

1) Jfr. f.eks. Malinvaud's lærebok, Ch. 16, § 4.

muligheter vil ikke foreligge dersom normalfordelte restledd inngår som en a priori spesifikasjon; da er fordelingen spesifisert fullt ut ved forventningene, variansene og kovariansene. Vi kan altså ha den situasjon at en bestemt parameter i en modell ikke er identifiserbar i spesialtilfellet med normalt fordelte restledd, men at den er det dersom restleddene har en annen fordeling, med flere uavhengige parametre enn den normale.¹⁾

1) Et eksempel, anvendt på en modell der det forekommer feilledd i modellens eksogene variable, er gitt av T.C. Koopmans og O.Reiersøl: The Identification of Structural Characteristics, The Annals of Mathematical Statistics, 21 (1950), 165-181. Jfr. også Malinvaud's lærebok, Ch. 10, §8.

