Arbeidsnotater

STATISTISK SENTRALBYRÅ

Dronningensgt. 16, Oslo-Dep., Oslo 1. Tlf. 41 38 20

IO 74/49 26. november 1974

ESTIMERING AV TOTALER MED EN TO-TRINNS UTVALGSPLAN DER DE PRIMÆRE UTVALGSOMRÅDER TREKKES MED ULIK SANNSYNLIGHET I FØRSTE TRINN

av

Petter Laake

Side

1. Generelt om Byråets nye utvalgsplan

I likhet med den gamle utvalgsplanen trekkes også utvalget i den nye utvalgsplanen i to trinn. På første trinn trekkes geografiske områder, primære utvalgsområder, som er faste fra undersøkelse til undersøkelse. De enhetene som skal intervjues, trekkes så fra et register over befolkningen i de uttrukne utvalgsområdene.

I Byråets nye standard utvalgsplan er kommunene valgt som primære utvalgsområder. Kommuner med færre enn 3 000 innbyggere slåes sammen med andre kommuner slik at det er minst 3 000 innbyggere innen hvert utvalgsområde. Utvalgsområdene er så stratifisert etter kommunetype og innbyggerantall. Byer med over 30 000 innbyggere er tatt ut som egne strata, og utvalget i disse er trukket rent lotterisk. En oversikt over stratifiseringen er gitt i Thomsen og Rideng (1974).

Formålet med dette notatet er å angi en estimator for populasjonstotalen i hele landet og å angi en estimator for variansen til denne.

I avsnittene 2 og 3 studerer vi en estimator for en populasjonstotal når utvalgsplanen er en stratifisert to-trinns utvalgsplan, og det trekkes minst to utvalgsområder fra hvert stratum. I Byråets nye utvalgsplan trekkes imidlertid bare ett utvalgsområde fra hvert stratum. For dette tilfellet finnes ingen forventningsrett estimator for variansen, og vi har derfor i avsnitt 7 angitt en tilnærmet forventningsrett estimator og funnet skjevheten til denne estimatoren. Strataene som består av byer med over 30 000 innbyggere krever en spesiell diskusjon som er foretatt i avsnitt 6.

2. Spesielle definisjoner og notasjoner

Som nevnt innledningsvis betrakter vi i dette avsnittet tilfellet når bestanden er stratifisert, og det trekkes minst to utvalgsområder fra hvert stratum. Notasjonen i det følgende er stort sett i samsvar med Hoem (1973). Vi antar at det er M_i utvalgsområder i i-te stratum. Det j-te av disse har $N_i(j)$ trekkeenheter, og den k-te trekkeenheten har verdien $a_i(j,k)$ på det vi måler. Vi lar

$$N_i = \sum_j N_i(j),$$

$$N_i = \sum_i N_i,$$

$$a_i(j) = \sum_k a_i(j,k),$$

$$\bar{a}_i(j) = a_i(j)/N_i(j),$$

$$a_i = \sum_j a_i(j),$$

$$\bar{a}_i = a_i/M_i,$$

og

$$a = \sum_i a_i = \sum_i \sum_j \sum_k a_i(j,k).$$

Vi ønsker å estimere totalverdien a.

I stratum i trekker vi ut m_i av de M_i utvalgsområdene. La $\pi_i(j)$ være sannsynligheten for at utvalgsområde j i stratum i blir trukket ut, og la $\pi_i(j,k)$ være sannsynligheten for at både utvalgsområde j og k i stratum i skal bli trukket ut.

La $J_{i1}, J_{i2}, \ldots, J_{im_i}$ være numrene på de utvalgsområdene som blir trukket ut i stratum i og la $\underset{\sim}{J}=(J_{i1},\ldots,J_{im_i}, J_{21},\ldots)$ være numrene på alle de uttrukne utvalgsområdene. Fra hvert uttrukne utvalgsområde trekkes et gitt antall trekkeenheter rent lotterisk. La $n(\underset{\sim}{J})$ og $n_{ij}(\underset{\sim}{J})$ være totalt antall trekkeenheter i henholdsvis hele utvalget og i utvalget i j-te utvalgsområde i stratum i.

Numrene på de enhetene som blir trukket ut fra utvalgsområde j i stratum i, betegner vi med $K_{ij1}, K_{ij2}, \ldots$, og vi lar

$$X_{ijs} = a_i(j, K_{ijs}),$$

og

$$\bar{X}_{ij} = \sum_s X_{ijs}/n_{ij}(\underset{\sim}{J}).$$

Vi innfører indeksvariabelen

$$I_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ dersom utvalgsområde j i stratum i er i utvalget,} \\ 0 \text{ ellers,} \end{cases}$$

og lar $\bar{X}_{ij}$ være gjennomsnittet for de $n_{ij}(\underset{\sim}{J})$ uttrukne trekkeenhetene i utvalgsområde j i stratum i. Dersom $I_{ij}=0$, er $n_{ij}(\underset{\sim}{J})=0$, og vi definerer $\bar{X}_{ij}=0$.

3. Estimering av populasjonstotalen og variansen til estimatoren

En estimator for totalen er

$$\hat{a} = \sum_i \sum_j \{I_{ij} \; N_i(j) \; \bar{X}_{ij}/\pi_i(j)\} \tag{3.1}$$

Sats 1: $\hat{a}$ er forventningsrett for a.

Bevis: La

$$V_{ij} = N_i(j) \; \bar{X}_{ij}.$$

Siden $E \; \{V_{ij} | I_{ij} = 1\} = a_i(j)$,

og

$$E \; \{I_{ij} \; V_{ij} | I_{ij}\} = I_{ij} \; a_i(j), \tag{3.2}$$

er

$$E \; \{I_{ij} \; V_{ij}\} = \pi_i(j) \; a_i(j).$$

Herav følger at

$$E \; \{I_{ij} \; V_{ij}/\pi_i(j)\} = a_i(j),$$

og satsen er dermed bevist. $\square$

Sett nå

$$\hat{a}_i = \sum_j \{I_{ij} \; V_{ij}/\pi_i(j)\}. \tag{3.3}$$

Da er

$$\hat{a} = \sum_i \hat{a}_i.$$

La videre

$$\sigma_i^2(j) = \frac{1}{N_i(j)-1} \sum_k \{a_i(j,k) - \bar{a}_i(j)\}^2,$$

og

$$\tau_{ij}^2(\underset{\sim}{J}) = \frac{\sigma_i^2(j)}{n_{ij}(\underset{\sim}{J})} \, \frac{N_i(j)-n_{ij}(\underset{\sim}{J})}{N_i(j)}.$$

Dersom $I_{ij}=0$, er $n_{ij}(\underset{\sim}{J})=0$, og $\tau_{ij}^2(\underset{\sim}{J})$ er da udefinert.

Sats 2: La $\hat{a}$ være definert ved (3.1). Da er

$$\text{var}\ \hat{a} = \sum_i \Big[\sum_j \sum_k \frac{\pi_i(j,k)-\pi_i(j)\ \pi_i(k)}{\pi_i(j)\ \pi_i(k)}\ a_i(j)\ a_i(k)$$

$$+ \sum_j \{\ \eta_i(j)/\pi_i(j)\}\Big]. \tag{3.4}$$

hvor $\eta_i(j) = E\ \{N_i^2(j)\ \tau_{ij}^2(\underset{\sim}{J}) \mid I_{ij} = 1\}.$ (3.5)

Bevis: Vi har umiddelbart fra (3.3) at

$$\text{var}\ \hat{a}_i = \sum_j \text{var}\ \{I_{ij}\ V_{ij}\}\ /\ \pi_i^2(j)$$

$$+ \sum_{j \neq k} \frac{1}{\pi_i(j)} \frac{1}{\pi_i(k)} \text{cov}\ \{I_{ij}\ V_{ij},\ I_{ik}\ V_{ik}\}. \tag{3.6}$$

Videre er

$$\text{var}\ \{I_{ij}\ V_{ij} \mid I_{ij} = 1,\ \underset{\sim}{J} = \underset{\sim}{j}\} = N_i^2(j)\ \tau_{ij}^2(\underset{\sim}{j}),$$

og

$$\text{var}\ \{I_{ij}\ V_{ij} \mid I_{ij} = 1\} = E\ \{N_i^2(j)\ \tau_{ij}^2(\underset{\sim}{J}) \mid I_{ij} = 1\}$$

$$= \eta_i(j). \tag{3.7}$$

Herav følger at

$$\text{var}\ \{I_{ij}\ V_{ij} \mid I_{ij}\} = I_{ij}\ \eta_i(j),$$

som sammen med (3.2) gir

$$\text{var}\ \{I_{ij}\ V_{ij}\} = \pi_i(j)\ \eta_i(j) + a_i^2(j)\ \pi_i(j)$$

$$\{1 - \pi_i(j)\}. \tag{3.8}$$

Det gjenstår å finne

$$\text{cov}\ \{I_{ij}\ V_{ij},\ I_{ik}\ V_{ik}\} = E\ \{I_{ij}\ V_{ij}\ I_{ik}\ V_{ik}\}$$

$$- E\ \{I_{ij}\ V_{ij}\}\ E\ \{I_{ik}\ V_{ik}\}.$$

Vi har umiddelbart at

$$E\ \{I_{ij}\ V_{ij}\ I_{ik}\ V_{ik} \mid I_{ij},\ I_{ik}\} = I_{ij}\ I_{ik}\ a_i(j)\ a_i(k),$$

slik at

$$E\ \{I_{ij}\ V_{ij}\ I_{ik}\ V_{ik}\} = \pi_i(j,k)\ a_i(j)\ a_i(k). \tag{3.9}$$

Videre er

$$E\{I_{ij}\ V_{ij}\}\ E\{I_{ik}\ V_{ik}\} = \pi_i(j)\ a_i(j)\ \pi_i(k)\ a_i(k),$$

som gir

$$\text{cov}\{I_{ij}\ V_{ij},\ I_{ik}\ V_{ik}\} = a_i(j)\ a_i(k)\ \{\pi_i(j,k) - \pi_i(j)\ \pi_i(k)\}. \qquad (3.10)$$

Ved et resonnement tilsvarende det i Hoem (1973, side 12) finner vi at

$$\text{cov}\,(\hat{a}_i,\ \hat{a}_j) = 0 \quad \text{for } i \neq j. \qquad (3.11)$$

(3.8), (3.10) og (3.11) gir tilsammen

$$\begin{aligned}\text{var}\ \hat{a} &= \sum_i \{\sum_j \left[\pi_i(j)\ \{1-\pi_i(j)\}\ a_i(j) + \pi_i(j)\ \eta_i(j)\right]/\pi_i^2(j) \\ &\quad + \sum_{j \neq k} \frac{1}{\pi_i(j)} \frac{1}{\pi_i(k)}\ a_i(j)\ a_i(k)\ \left[\pi_i(j,k) - \pi_i(j)\ \pi_i(k)\right]\} \\ &= \sum_i \left[\sum_j \sum_k \frac{\pi_i(j,k)-\pi_i(j)\pi_i(k)}{\pi_i(j)\ \pi_i(k)}\ a_i(j)\ a_i(k) \right.\\ &\quad \left. + \sum_j \{\eta_i(j)\ /\ \pi_i(j)\}\right], \end{aligned} \qquad (3.12)$$

og dermed er satsen bevist. $\square$

4. Estimering av variansen

Vi innfører størrelsene

$$S_{ij}^2(\underset{\sim}{J}) = \frac{I_i(j)}{n_{ij}(\underset{\sim}{J})-1} \sum_s \{X_{ijs} - \bar{X}_{ij}\}^2, \qquad (4.1)$$

og

$$T_{ij}^2(\underset{\sim}{J}) = \frac{S_{ij}^2(\underset{\sim}{J})}{n_{ij}(\underset{\sim}{J})} \frac{N_i(j)-n_{ij}(\underset{\sim}{J})}{N_i(j)}\ . \qquad (4.2)$$

Da er

$$E\{S_{ij}^2(\underset{\sim}{J})\ |\ \underset{\sim}{J} = \underset{\sim}{j},\ I_i(j) = 1\} = \sigma_i^2(j),$$

og

$$E\{T_{ij}^2(\underset{\sim}{J})\ |\ \underset{\sim}{J} = \underset{\sim}{j},\ I_i(j) = 1\} = \tau_{ij}^2(\underset{\sim}{j}).$$

Dermed er

$$E\,\{N_i^2(j)\ T_{ij}^2(\underset{\sim}{J})\ |\ I_{ij}\} = I_{ij}\ \eta_i(j),$$

og

$$E\,\{N_i^2(j)\ T_{ij}^2(\underset{\sim}{J})\} = \pi_i(j)\ \eta_i(j). \qquad (4.3)$$

<u>Sats 3</u>: En forventningsrett for var $\hat{a}$ er gitt ved

$$\text{est}_1 \text{ var } \hat{a} = \sum_i \{\sum_j \sum_k \frac{\pi_i(j,k)-\pi_i(j)\pi_i(k)}{\pi_i(j,k)} \cdot \frac{I_{ij}\ V_{ij}}{\pi_i(j)}\ \frac{I_{ik}\ V_{ik}}{\pi_i(k)}\}$$

$$+ \sum_i \sum_j \{N_i^2(j)\ T_{ij}^2(\underset{\sim}{J})\ /\ \pi_i(j)\}. \qquad (4.4)$$

<u>Bevis</u>: Av (4.3) følger at

$$E\left[\sum_i \sum_j \{N_i^2(j)\ T_{ij}^2(\underset{\sim}{J})\ /\ \pi_i(j)\}\right] = \sum_i \sum_j \eta_i(j). \qquad (4.5)$$

Ved sammen med (3.8) og (3.9) å bruke at

$$E\,\{I_{ij}\ V_{ij}^2\} = \text{var}\,\{I_{ij}\ V_{ij}\} - \{E\,[I_{ij}\ V_{ij}]\}^2$$

finner vi

$$\sum_j \sum_k \frac{\pi_i(j,k)-\pi_i(j)\ \pi_i(k)}{\pi_i(j,k)}\ \frac{1}{\pi_i(j)}\ \frac{1}{\pi_i(k)}\ E\,\{I_{ij}\ V_{ij}\ I_{ik}\ V_{ik}\}$$

$$= \sum_j \sum_k \frac{\pi_i(j,k)-\pi_i(j)\ \pi_i(k)}{\pi_i(j)\ \pi_i(k)}\ a_i(j)\ a_i(k)$$

$$+ \sum_j \{\eta_i(j)\ /\ \pi_i(j)\} - \sum_j \eta_i(j).$$

Ifølge (3.12) er dermed

$$E\ \text{est}_1 \text{ var } \hat{a} = \text{var } \hat{a},$$

og satsen er bevist. $\square$

La

$$I_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{dersom både utvalgsområdene } j \text{ og } k \text{ i stratum } i \\ & \text{er i utvalget,} \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

Ved en enkel omforming av (4.4) kan est_1 var $\hat{a}$ dermed skrives

$$est_1 \text{ var } \hat{a} = \sum_i \{ \sum_{j<k} \frac{\pi_i(j,k)-\pi_i(j)\ \pi_i(k)}{\pi_i(j,k)}\ I_{ijk} \left[\frac{V_{ij}}{\pi_i(j)} - \frac{V_{ik}}{\pi_i(k)} \right]^2 \}. \tag{4.6}$$

5. Selvveiende utvalg

Vi sier at utvalget er selvveiende dersom estimatoren (3.1) kan skrives på formen

$$\hat{a} = \frac{1}{b(\underset{\sim}{J})} \sum_i \sum_j I_{ij} \sum_s X_{ijs}. \tag{5.1}$$

Vi lar

$$n = \sum_i \sum_j n_{ij}(\underset{\sim}{J}) \tag{5.2}$$

være gitt. Dersom $I_{ij}=0$, er $n_{ij}(\underset{\sim}{J})=0$. Vi oppnår at utvalget blir selvveiende dersom

$$b(\underset{\sim}{J}) = \pi_i(j)\ n_{ij}(\underset{\sim}{J})\ /\ N_i(j),$$

$$b_i(\underset{\sim}{J}) = b(\underset{\sim}{J})\ /\ \pi_i(j),$$

og

$$n_{ij}(\underset{\sim}{J}) = b_i(\underset{\sim}{J})\ N_i(j) \text{ for alle } j \text{ slik at } I_{ij}=1.$$

Ved å bruke (5.2) finner vi

$$b(\underset{\sim}{J}) = n\ /\ \sum_i \sum_j \{I_{ij}\ N_i(j)\ /\ \pi_i(j)\}. \tag{5.3}$$

6. Særtilfellet med kommuner som utgjør egne strata

Som nevnt innledningsvis er alle byer med flere enn 30 000 innbyggere tatt ut som egne strata. I disse strataene trekker vi ut enhetene rent lotterisk. Anta at det er N_{0i} trekkeenheter i stratum i. Den k-te enheten i stratum i har verdien $a_{0i}(k)$ på det vi måler. Tilsvarende til avsnittet foran innfører vi

$$a_{0i} = \sum_k a_{0i}(k),$$

og

$$\bar{a}_{0i} = a_{0i} / N_{0i}$$

Av de N_{0i} enhetene trekkes et utvalg på

$$n_{0i}(\underset{\sim}{J}) = b(\underset{\sim}{J}) N_{0i}$$

trekkeenheter. De $n_{0i}(\underset{\sim}{J})$ trekkeenhetene har numrene K_{0i1}, K_{0i2}, ...
La da

$$X_{0is} = a_{0i}(K_{0is}),$$

og

$$\bar{X}_{0i} = \sum_s X_{0is} / n_{0i}(\underset{\sim}{J}).$$

$$\hat{a}_{0i} = N_{0i} \bar{X}_{0i} \tag{6.1}$$

blir altså en estimator for totalen.
Tilsvarende til avsnittet foran defineres

$$\sigma_{0i}^2 = \frac{1}{N_{0i}-1} \sum_k \{a_{0i}(k) - \bar{a}_{0i}\}^2,$$

og

$$S_{0i}^2 = \frac{1}{n_{0i}-1} \sum_s \{X_{0is} - \bar{X}_{0i}\}^2.$$

I følge Hoem (1973, side 17) er

$$\text{var } \hat{a}_{0i} = \frac{\sigma_{0i}^2}{n} N_{0i} (N-n).$$

Laake (1974, side 3) har vist at

$$\text{est var } \hat{a}_{0i} = S_{0i}^2 N_0 (\frac{\hat{N}}{n} - 1), \tag{6.2}$$

der

$$\hat{N} = \sum_i \sum_j \{I_i(j) N_i(j) / \pi_i(j)\}$$

er en forventningsrett estimator for var $\hat{a}_{0i}$.
En estimator for totalen i alle kommunene som utgjør egne strata er

$$\hat{a}_0 = \sum_i \hat{a}_{0i} \tag{6.3}$$

En forventningsrett estimator for totalen i hele landet blir dermed

$$\hat{\tilde{a}} = \hat{a} + \hat{a}_0.$$

Siden cov $(\hat{a}, \hat{a}_0)=0$, er en forventningsrett estimator for var $\hat{\tilde{a}}$ gitt ved

$$\text{est var } \hat{\tilde{a}} = \text{est}_1 \text{ var } \hat{a} + \sum_i \text{est var } \hat{a}_{0i}$$

der est_1 var $\hat{a}$ er gitt ved (4.6) og est var $\hat{a}_{0i}$ er gitt ved (5.2).

7. Estimering av variansen når $m_i=1$ for alle i

I den nye utvalgsplanen er antall strata så stort at en ikke kan trekke mer enn ett utvalgsområde innenfor hvert stratum. I dette tilfellet kan vi ikke bruke (4.6) som estimator for variansen. Vi slår derfor sammen strata slik at hvert av de nye strataene inneholder minst to uttrukne utvalgsområder. Denne sammenslåingen må foretas før utvalgsområdene trekkes. En slik samling av sammenslåtte strata kaller vi en gruppe. Anta at det er H grupper og at der er L_h strata i gruppe h.
I følge (3.3) er

$$\hat{a}_i = \sum_j \{I_{ij} V_{ij} / \pi_i(j)\} \tag{7.1}$$

en forventningsrett estimator for totalen i stratum i. Som estimator for variansen (3.4) foreslår vi nå

$$\text{est}_2 \text{ var } \hat{a} = \sum_{h=1}^{H} \frac{L_h}{L_h-1} \sum_{i=1}^{L_h} (\hat{a}_i - \frac{1}{L_h} \sum_{g=1}^{L_h} \hat{a}_g)^2. \tag{7.2}$$

Estimatoren er basert på at trekkingen på første trinn i hver gruppe foregår <u>med</u> tilbakelegging. Estimatoren er derfor ikke forventningsrett for variansen.

<u>Sats 4:</u> Skjevheten til estimatoren est_2 var $\hat{a}$ er gitt ved

$$E \text{ est}_2 \text{ var } \hat{a} - \text{var } \hat{a} = \sum_{h=1}^{H} \frac{L_h}{L_h-1} \cdot \sum_{i=1}^{L_h} (a_i - \frac{1}{L_h} \sum_{g=1}^{L_h} a_g)^2. \tag{7.3}$$

<u>Bevis:</u> Vi definerer

$$W_i^2 = (\hat{a}_i - \frac{1}{L_h} \sum_{g=1}^{L_h} \hat{a}_g)^2.$$

Denne observatoren har forventning

$$EW_i^2 = E\{(\hat{a}_i - E\hat{a}_i) - \frac{1}{L_h}(\sum_{g=1}^{L_h}\hat{a}_g - \sum_{g=1}^{L_h} a_g)$$

$$+ (E\hat{a}_i - \frac{1}{L_h}\sum_{g=1}^{L_h} a_g)\}^2 = E(\hat{a}_i - E\hat{a}_i)^2$$

$$+ E(\frac{1}{L_h}\sum_{g=1}^{L_h}\hat{a}_g - \frac{1}{L_h}\sum_{g=1}^{L_h} a_g)^2 + (E\hat{a}_i - \frac{1}{L_h}\sum_{g=1}^{L_h} a_g)^2$$

$$- 2E(\hat{a}_i - E\hat{a}_i)\frac{1}{L_h}\sum_{g=1}^{L_h}(\hat{a}_g - \sum_{g=1}^{L_h} a_g)$$

$$= \text{var}\,\hat{a}_i + \text{var}(\frac{1}{L_h}\sum_{g=1}^{L_h}\hat{a}_g) - 2\,\text{cov}(\hat{a}_i, \frac{1}{L_h}\sum_{g=1}^{L_h}\hat{a}_g)$$

$$+ (a_i - \frac{1}{L_h}\sum_{g=1}^{L_h} a_g)^2.$$

I følge (3.11) er cov $(\hat{a}_i, \hat{a}_j)=0$ for $i \neq j$, slik at

$$EW_i^2 = \text{var}\,\hat{a}_i + \frac{1}{L_h^2}\sum_{g=1}^{L_h}\text{var}\,\hat{a}_g - \frac{2}{L_h}\text{var}\,\hat{a}_i$$

$$+ (a_i - \frac{1}{L_h}\sum_{g=1}^{L_h} a_g)^2.$$

Innsatt i (7.2) gir dette

$$E\,\text{est}_2\,\text{var}\,\hat{a} = \sum_{h=1}^{H}\frac{L_h}{L_h-1}\sum_{i=1}^{L_h}(a_i - \frac{1}{L_h}\sum_{g=1}^{L_h} a_g)^2$$

$$+ \sum_{h=1}^{H}\sum_{i=1}^{L_h}\text{var}\,\hat{a}_i.$$

Herav følger at

$$E\,\text{est}_2\,\text{var}\,\hat{a} - \text{var}\,\hat{a} = \sum_{h=1}^{H}\frac{L_h}{L_h-1}\sum_{i=1}^{L_h}(a_i - \frac{1}{L_h}\sum_{g=1}^{L_h} a_g)^2. \quad \square$$

(7.3)

Vi ser altså at skjevheten til estimatoren (7.2) er avhengig av differansen mellom populasjonstotalen i de strataene vi slår sammen. Dersom altså

$$\sum_{i=1}^{L_h} (a_i - \frac{1}{L_h} \sum_{g=1}^{L_h} a_g) = 0 \text{ for alle } h,$$

vil (7.2) være forventningsrett for var $\hat{a}$.

8. Forandringer i formlene når utvalget er selvveiende

Dersom utvalget er selvveiende, følger det av (5.1) at

$$\hat{a}_i = \frac{1}{b(\underset{\sim}{J})} \sum_j I_{ij} \sum_s X_{ijs},$$

slik at (7.2) reduseres til

$$\text{est}_2 \text{ var } \hat{a} = \frac{1}{b^2(\underset{\sim}{J})} \sum_{h=1}^{H} \frac{L_h}{L_h-1} \sum_{i=1}^{L_h} \{\sum_j I_{ij} \sum_s X_{ijs} - \frac{1}{L_h} \sum_{g=1}^{L_h} \sum_k I_{ik} \sum_r X_{ikr}\}^2. \qquad (8.1)$$

En estimator for variansen til estimatoren for totalen i hele landet er gitt ved

$$\text{est var } \hat{\underset{\sim}{a}} = \text{est var } \hat{a}_0 + \text{est}_2 \text{ var } \hat{a},$$

der est var $\hat{a}_0$ er gitt ved (6.2) og (6.3) og est_2 var $\hat{a}$ er gitt ved (8.1).

Referanser:

[1] Cochran, W.C. (1963): "Sampling Techniques". John Wiley & Sons, New York.

[2] Hoem, Jan M. (1973): "Statistisk Sentralbyrås utvalgsundersøkelser. Elementer av det matematiske grunnlaget." SSB-artikkel nr. 58.

[3] Laake, Petter (1974): "Estimering av variansen til estimatoren for populasjonsverdien a_0 for Oslo i Byråets intervjuundersøkelser." Arbeidsnotat IO 74/7.

[4] Thomsen, Ib og Rideng, Arne (1974): "Oversikt over arbeidet med ny utvalgsplan." Arbeidsnotat IO 74/25.