Arbeidsnotater

STATISTISK SENTRALBYRÅ

Dronningensgt. 16, Oslo-Dep., Oslo 1. Tlf. 41 38 20

IO 76/13 5. mai 1976

METODEHEFTE NR. 17

NOTATER OM INNGÅELSE OG OPPLØSNING AV EKTESKAP - METODER TIL BESKRIVELSE OG ÅRSAKSANALYSE, OG OM ANALYTISK GLATTING AV GIFTERMÅLSKURVER

INNHOLD

FORORD

Metodehefter i serien Arbeidsnotater

I tilknytning til mange prosjekter i Statistisk Sentralbyrå utarbeides det mindre, upretensiøse notater for avklaring av spørsmål av metodisk interesse. Det kan dreie seg om utvalgsteknikk, alternative spørsmålsformuleringer, presentasjonsmetoder, begrepsavklaringer, diskusjon av "funn" i data, systemidéer eller andre temaer. Selv om mange slike notater bare har begrenset interesse i ettertid, vil det blant dem være noen som kunne fortjent å bli alminnelig tilgjengelig. Det kan også være nyttig å ha dem registrert sentralt slik at det blir lettere å få oversikt over det stoffet som foreligger, og lettere å referere tilbake til det. Byrået publiserer derfor leilighetsvis et passende antall notater av dette slaget samlet i metodehefter i serien Arbeidsnotater.

Kontorlederne bes holde øynene åpne for denne nye publiseringsmuligheten.

Forsker Per Sevaldson er redaktør av metodeheftene. Fullmektig Liv Hansen er redaksjonssekretær. Medarbeidere i Byrået som lager stoff som kan være aktuelt, bes sende dette til redaksjonen etter hvert som det blir ferdig. Retningslinjer for utformingen av inserater i metodeheftene finnes på side 46 til side 47 i Metodehefte nr. 9 (ANO IO 73/36).

INNGÅELSE OG OPPLØSNING AV EKTESKAP: METODER TIL BESKRIVELSE OG ÅRSAKSANALYSE[1)]

av Jan Mønnesland

1. Hva er det som bestemmer giftermålsstrukturen?

Giftermålsstrukturen viser forholdsvis sterke variasjoner over det siste århundre i de fleste land, og til dels enda sterkere fra land til land. Utviklingen i Norge er beskrevet i Sundt (1855), Vogt (1952), Ramholt (1953), Backer (1965), Berge (1975), samt i den løpende offisielle statistikk. Sundt (1855) viser at de store endringene som skjedde i antall giftermål i første halvpart av det 19. århundre i alt vesentlig hadde sin forklaring i endringer i befolkningens alderssammensetning, og ikke, slik den framherskende mening på den tid var, i gode og dårlige økonomiske forhold, endrede moralnormer etc.

Siden alder viste seg å være en så vidt sterkt virkende faktor, har alle de seinere betraktninger korrigert for alder, dvs. studert utviklingen i giftermålsmønsteret i de ulike aldersklasser, for dermed å finne fram til variasjoner som må skyldes andre faktorer. Vogt (1952) viser hvordan de aldersspesifikke giftermålstilbøyeligheter varierte fra 1900 til 1950, og finner merkbare reduksjoner i forbindelse med de økonomiske depresjoner og krigene. Han finner også en tendens til sterk stigning i tiden etter slike nedganger, som kan tyde på en tendens til å ta igjen det forsømte. Slike sammenhenger mellom økonomiske konjunkturer og giftermålstilbøyeligheten er også påvist av tallrike artikkelforfattere for andre land (se f.eks. Yule (1906)). Metodene er knyttet til samfunnet som helhet som den enheten en studerer, dvs. hvordan økonomiske egenskaper ved samfunnet påvirker samfunnets giftermålsantall (korrigert for endringer i aldersfordelingen).

Mer individorienterte betraktninger finner vi bl.a. i Fawcett (1974), Becker (1973-74) og Preston & Richards (1975). Becker studerer hvordan individenes giftermålsønsker vil endre seg med individets økonomiske situasjon, og Preston & Richards konsentrerer seg spesielt om hvilken virkning økte sysselsettingsmuligheter for kvinner har på giftermålsønskene. Konklusjonene blir at jo bedre utdannelses-, arbeids- og inntektsmuligheter som foreligger for ugifte, jo mindre blir trangen til å gifte seg i ung alder. Om dette resulterer i større sannsynlighet for å forbli ugift, eller bare i at giftermålene utsettes til høyere aldre, er det vanskeligere å si noe om. Fawcett (1974) gir en oversikt over hvordan individets giftermålsatferd påvirkes av individets psykologiske situasjon, hvilke momenter som taler for og mot at vedkommende skal satse på giftermål. En viktig konklusjon er at ønske om giftermål henger nøye sammen med ønske om å få barn, dette siste blir ofte i intervjusvar betegnet som selve formålet med giftermålet, gjerne så sterkt at ekteskapet er mislykket om det ikke resulterer i barn. Det er m.a.o. en sammenheng mellom giftermål og fødsler ut over det at de aldersspesifikke fødselsrater for gifte er større enn de tilsvarende rater for ugifte. Selve ekteskapsinngåelsen er ofte forårsaket av at ønske om å få barn foreligger. Kiær (1873) finner at av dem som giftet seg i 1870, nedkom 33% innen 8 måneder etter vielsen. Det kan m.a.o. være vanskelig å si om det er den ekteskapelige status som påvirker fertiliteten, eller om det er fertiliteten som påvirker den ekteskapelige status. Det kan være en simultanitet i beslutningen som gjør et slikt skille mellom årsak og virkning til en begrepsmessig umulighet.

Meningsinnholdet i giftermål og ekteskapelig status viser seg ved nærmere undersøkelse ikke alltid å være helt entydig. Holder vi oss til den offentlige registrering, så har vi et system med klart identifiserte overganger og statustilhørighet. Det vi imidlertid primært er interessert i, er samlivsforholdene, og i den grad sammenhengen mellom registrerte og funksjonerende samlivsforhold endrer seg, kan tallanalyser basert på registreringene gi misvisende forhold. F.eks. vil en sammenlikning av ekteskapenes varighet i Norge og Irland bli påvirket av at skilsmisse i Irland er forbudt. O'Higgins (1974) viser hvordan dette slår ut i et stort antall ekteskapsdeserteringer, men hvor ekteskapet fortsatt består i registrene. McGregor (1957) viser hvordan ekteskapsbegrepet har utviklet

1) Notatet bringer en del tanker jeg har gjort meg under forberedelsene til et prosjekt for studiet av sivilstandsrelasjoner, og går til dels ut over de emner prosjektet vil omfatte. Jeg har hatt stort utbytte av å diskutere disse emnene med mine kolleger i Sosiodemografisk Forskningsgruppe, og med professor Jan M. Hoem.

seg i England i tiden etter reformasjonen. I lange perioder var skilsmisse formelt forbudt. Dette førte til at mange par unnlot å registrere samlivet, som igjen førte til at slike samliv også ble ansett for ekteskap, dvs. at skilsmisseforbudet juridisk også gjaldt slike. I tillegg oppsto det etter hvert en ordning med å få ekteskap annullert, dvs. at kirken erklærte at ekteskapet ikke var lovlig inngått. Denne ordningen ble med tiden så sterkt utvidet at det trygt kan likestilles med den seinere innførte skilsmisseadgang. Som en ser var det et til dels meget rotete begrepsapparat, og en begrepsutvikling som gjør det meget vanskelig å gjennomføre historiske sammenlikninger av ekteskapsmønsteret ved hjelp av de formelle statusdefinisjonene.

I den seinere tid har vi opplevd en stigende tendens til uregistrerte samliv i Skandinavia. Koch-Nielsen (1975) anslår andelen samliv som ikke er ekteskapsregistrert i Danmark 1974 til ca. 8-9%, men hele 25% for aldersgruppen 20-29 år. Näsholm (1972) og Alnebring (1973) gir nokså tilsvarende resultater for Sverige. Vi vet ikke så mye detaljert om hvordan forholdet er i Norge. Brunborg (1975) presenterer materiale som viser at uregistrerte samliv også her er en form som har en viss betydning. Et vesentlig poeng er i hvilken grad dette er en slags forlovelsestid, hvor partene tar sikte på seinere å registrere sitt forhold, eller om det er uttrykk for et ønske om å holde sitt samliv utenfor det formelle ekteskap. I det første tilfelle blir formen noe analog med separasjonsordningen, dvs. at den reelle statusovergang skjer noe foran den formelle i tid. Om denne ventetiden fra reell til formell overgang var konstant eller om vi kunne skaffe oss informasjon om den, ville data fra de formelle registre fortsatt gi oss gode opplysninger om den reelle statusfordeling. Om det derimot er en tendens til at mange samliv i det hele tatt ikke vil bli registrert, vil den formelle statusinndeling miste mye av sin interesse. Foreløpig er det ingen dokumentert tendens til at utenomekteskapelige samliv har så stor betydning i Norge.

En sammenlikning av giftermålsmønsteret mellom forskjellige land og mellom historiske perioder fra middelalderen fram til i dag, er gitt i Hajnal (1965). Det viser seg at på tross av de store endringer som har skjedd i giftermålsmønstrene i de enkelte europeiske land i denne tiden, så er det hele tiden et klart skille mellom de østlige og vestlige land, hvor skillet går i en temmelig rett linje Leningrad - Trieste. Øst for denne linjen finner vi et tidlig og nesten universalt gifte, mens vi på vestsiden har høyere giftermålsaldre og større andel som forblir ugifte. Hajnal (1953) viser at dette skillet også viser seg i utviklingen fra 1935-1950. Mens landene nordvest for denne linjen (og land med europeiske utvandrere i andre verdensdeler) hadde en markert økning i giftermålstilbøyelighetene, så var det stabilitet eller en mindre nedgang i samme periode i de øvrige områder.

Som en vil se, påvirkes giftermålsmønsteret både av demografiske (alder, kjønnsproporsjoner etc.), økonomiske, psykologiske, sosiale, kulturelle og geografiske faktorer. Det er neppe noe poeng i å prøve å skille ut noen av disse årsaksfaktorene som "de viktigste". Når vi i dette prosjektet vil konsentrere oss om de demografiske faktorer, så er det bl.a. fordi vi ved å isolere de relevante demografiske variable vil kunne skaffe oss et tallmateriale som gir et bedre utgangspunkt for å studere hvordan ikke-demografiske variable påvirker giftermålsmønsteret.

En god datapresentasjon av hvordan giftermålsatferden varierer over tid og med ulike demografiske faktorer, finner vi i Holmbeck (1974) for Sverige fra 1950 av. Forfatteren kommer også inn på hvilke konsekvenser denne utviklingen kan ha for prognoseformål. Spøhr (1972) og Mertens (1965) gir eksempler på prognosemetoder for sivilstandsfordelingen, og Spøhr (1973) gir en tallmessig prognose for sivilstandsfordelingen i Danmark fram til 1988. Dette notatet vil delvis berøre prognosemetodikken, selv om hovedformålet mer er å gi noen tanker om analysemetoder som kan anvendes på historisk gitte tall.

2. Bruk av Markovprosessmodeller i beskrivningen av giftermålsmønsteret

En Markovprosessmodell tar utgangspunkt i et tilstandsrom som består av et antall båser, statuser, hvor hver enhet (individ) til enhver tid er i en og bare en status. Overganger mellom de forskjellige statuser skjer med sannsynligheter som kan variere for de ulike statuser, med tiden og eventuelt med andre faktorer. Antar vi at overgangssannsynlighetene varierer med alder x, så er P_{ij} (x, x+t) sannsynligheten for at en x-årig person med status i vil være i status j når han er x+t år. Vi definerer så overgangsintensitetene

$$(1) \qquad \nu_{ij}(x) = \lim_{t \downarrow 0} \frac{P_{ij}(x, x+t)}{t}$$

Om vi kjenner alle disse intensitetene, så har vi en uttømmende beskrivelse av strømningene mellom de forskjellige statusene.

I en slik Markovprosessmodell må en gjøre enkelte forutsetninger som er langt fra trivielle. Først og fremst må en bestemme seg for hvordan tilstandsrommet skal defineres, dvs. hva slags tilstander vi vil regne til samme status, og hva slags tilstander vi vil regne til forskjellige statuser med tilhørende overgangsintensiteter. Om en velger å holde de gifte og de fraskilte i hver sin status, så må en f.eks. bestemme seg for hva en vil gjøre med de separerte. Om en regner dem som gifte, så er dette formelt riktig, men det kan være grunn til å tro at fødselssannsynligheten for separerte likner mer på den de skilte har enn på den til de øvrige gifte. Om en derimot regner dem som skilte, vil vi få problemer med intensiteten for overgang fra status skilt til status gift, og vi vil dessuten få store registreringsproblemer. Å behandle de separerte som en egen status, har den ulempen at overgangen fra separert til gift (gjenopptatt samliv) ikke blir registrert i Norge. Av hensyn til konsistens i overgangene bør de separerte regnes som gifte på tross av at gruppen gifte blir noe inhomogen m.h.p. fødselssannsynlighetene. Andre spørsmål som reiser seg i definisjonen av tilstandsrommet er om en skal splitte opp etter paritet, ekteskapets multiplisitet o.a.

Når en har bestemt seg for et tilstandsrom, kommer valget av forklaringsvariable for intensitetene. I (1) har vi latt intensiteten avhenge av alder. Andre rimelige forklaringsvariable kan være tiden (intensitetene varierer med kalenderen), varigheten av inneværende status, økonomiske og sosiale faktorer etc. En kan ta med individuelle variable som inntekt, utdannelse etc. Eller en kan ta med tilsvarende størrelser for bestanden som helhet, dvs. nasjonalinntekt, antall personer med høyere utdannelse etc.

En tankegang som det er vanskelig å få knyttet til slike Markovprosessmodeller, er at et individs eller en bestands atferd kan påvirkes av atferden til andre individer og bestander (Keyfitz (1965)). På samme vis som dødeligheten blant kaniner avhenger av bestanden av rever, så vil giftermålsintensitetene hos det ene kjønn avhenge av bestanden og av giftermålsintensitetene hos det annet kjønn. Hoem (1969) viser hvilke matematiske problemer en får om en forsøker å gi en presisering av intensitetene som tar vare på disse sammenhengene. I avsnitt 11 og 12 kommer jeg litt inn på dette, ellers vil jeg se bort fra kjønnsavhengigheten på tross av at dette er en åpenbar svakhet ved modellen.

Markovprosessmodellene forutsetter et entydig overgangsbegrep, og dersom intensitetene varierer kontinuerlig med en tidsvariabel (datering, alder) må vi forutsette at overgangen gjennomføres uten bruk av tid. Som nevnt i avsnitt 1 kan det være en viss tidsdifferanse mellom beslutning og registrering. De årsaksfaktorer som er knyttet til hendelsene, er i hovedsak årsaksfaktorer knyttet til beslutningen. Det kan være rent organisatoriske forhold som bestemmer tidspunktet for selve registreringen (separasjonstid, arrangementsmessige forberedelser etc.). Det er da noe misvisende å betrakte selve registreringen som forårsaket av intensiteten på registreringstidspunktet. Om en person bestemmer seg for å gifte seg med en annen, så kan denne beslutningen resultere i en skilsmissebegjæring, deretter (etter at en del tid er brukt til formaliteter) separasjon, så etter den lovbestemte separasjonstid kommer skilsmissen, så begjæres lysing, og etter at alle formaliteter er i orden skjer giftermålet. Om disse lever sammen som om de var gifte under hele prosessen, så vil det være beslutningstidspunktet som er av interesse. Men om samlivet endrer seg først ved selve registreringen (vielsen), så kan registreringstidspunktet være like interessant. F.eks. kan det være grunn til å tro at sjansene for å ombestemme seg endres ved den formelle skilsmisse og det formelle giftermål. Markovprosessmodellene får ikke med seg det skift som skjer ved selve beslutningen. Hvorvidt dette er en alvorlig svakhet avhenger av hvor mye selve registreringen betyr for individets atferd i forhold til beslutningen om å foreta en slik registrering.

I den grad vi kan skaffe informasjon om selve beslutningstidspunktet, kan det muligens la seg gjøre å ta hensyn til tidsdifferansen mellom beslutning og hendelse i en Markovprosessmodell. Men avhengigheten i beslutningen for hendelser som er atskilt i tid er det svært komplisert å få tatt hensyn til i denne typen modeller.

3. Modell for 1. gangs giftermål

I denne modellen skiller vi bare mellom to statusgrupper, nemlig ugift (i betydningen aldri gift) og andre. I tillegg er det mulig å dø.

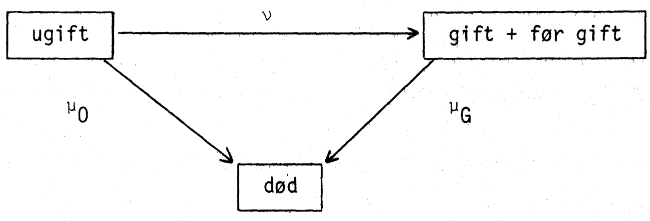

Fig. 1

Pilene angir de mulige overgangene i modellen, og de greske bokstavene er symboler for de respektive overgangsintensitetene. Vi antar at intensitetene bare avhenger av den heltallige alder, samt at de kan variere fra kalenderår til kalenderår.

Ved å bruke sannsynlighetsmaksimeringsmetoden finner vi at vi kan estimere de aldersspesifikke intensitetene ved å ta antall overganger i bestanden for den spesifikke alder, og dividere på total oppholdstid i utgangsstatusen for personer i den samme alder. Et lettere tilgjengelig anslag for nevneren er å ta middelbestanden i utgangsstatusen for den spesifikke alder i det valgte kalenderår, dvs. gjennomsnittet av bestanden ved inngangen og ved utgangen av kalenderåret.

De aldersspesifikke estimatorene for ν, μ_0 og μ_G blir asymptotisk uavhengige. Vi kan derfor i analysen av giftermålene glemme μ_0 og μ_G og bare studere ν separat. Vi har datamateriale som gjør det mulig å estimere disse intensiteter helt fra 1910 av og fram til i dag. Et slikt materiale burde gi et godt utgangspunkt både for å studere sammenhenger mellom intensitetene for de ulike aldre og kalenderår, og dessuten studere eventuelle sammenhenger mellom disse intensitetene og andre (f.eks. ikke-demografiske) variable.

4. Kohortfordeling og periodefordeling

I analysen av de aldersspesifikke ratene ν (x) foretrekker en ofte å studere fullstendige aldersfordelinger, dvs. hele samlinger ν (x) hvor x gjennomløper alle aldre. Slike fordelinger gir mulighet for å kunne regne ut totalmål som andelen som forblir ugift, forventet giftermålsalder blant dem som gifter seg, fraktilaldre, spredningsmål etc. Så lenge vi bare ser på ν (x) blir disse målene å tolke som bruttomål, dvs. slik det ville vært om alle overlevde til siste mulige giftermålsalder. Slike totalmål gir ofte en enklere tolkning av giftermålsmønsteret enn den opprinnelige samling av aldersspesifikke intensiteter.

Om vi tar ett kalenderår og samler alle de aldersspesifikke ratene som gjelder dette året, får vi periodefordelingen til giftermålsratene. Om vi derimot tar for oss ett fødselskull (de som har samme fødselsår) og samler de ratene disse gjennomlever, får vi kohortfordelingen. Denne siste vil m.a.o. gjelde rater for ett seinere kalenderår hver gang vi går opp et aldersår.

Kohortfordelingen gir den enkleste tolkning til fordelingens totalmål. Dette er de intensitetene som faktisk har virket på fødselskullet gjennom levetiden. Periodefordelingen derimot gir intensiteter som ingen har gjennomlevd på denne måten. Totalmålene her vil gjelde en hypotetisk bestand som vi antar at gjennom sitt liv har blitt påvirket av de aldersspesifikke intensitetene som ble observert det ene kalenderåret.

De forandringer som skjer med de aldersspesifikke intensitetene fra år til år, kan nå tolkes som forandringer i periode- eller i kohortfordelingene. Det vil her være et vurderingsspørsmål hvilken tolkning som har mest for seg. Om vi ett år, f.eks. i forbindelse med krise eller krig, opplever en reduksjon i alle de aldersspesifikke intensitetene, og at de deretter stort sett beholder sitt nye nivå, kan vi si at vi det året fikk en endring i periodefordelingen. En slik endring blir vanskeligere identifiserbar i kohortfordelingene. Men om vi ett år (p.g.a. krig el. likn.) fikk en sterk dødelighet blant menn mellom 15 og 20 år slik at kjønnsproporsjonen ble merkbart endret, så er det rimelig å tro at giftermålsintensitetene for disse årskull menn vil være større enn normalt for resten av levetiden, og mindre enn normalt for kvinner i tilsvarende kohorter. En slik hendelse er lett identifiserbar i kohortfordelingene, men vanskeligere å tolke ut fra periodefordelinger. Svært ofte vil vi oppleve endringer i intensitetene som har både periode- og kohortvirkninger, og det er derfor vanskelig på forhånd å si hvilken betraktningsmåte som vil være den gunstigste.

Mens en ved periodefordelinger kan få forholdsvis ferske tall for hele fordelingen, vil en for de ferdige kohorter ha opp til 80-90 år gamle tall for enkelte av intensitetene. Det er liten grunn til å tro at mønsteret har holdt seg konstant såpass lenge, slik at disse ferdige kohortfordelingene ikke gir så særlig god informasjon om situasjonen pr. dato, og de er dermed lite egnet som grunnlag for framtidsutsagn. Skal en ha ferskere tall for de yngre aldre, så vil kohorten ikke være ferdig med sin livs- og giftermålshistorie. Dette gjør periodefordelingene mer egnet til prognoseformål. Skal en benytte kohortfordelingene krever dette tilleggsforutsetninger om kohortenes fullføring.

5. Glatting

Når vi estimerer ν (x) som nevnt i avsnitt 3 og samler hele aldersfordelingen i et diagram med alder langs den vannrette og intensitetens verdi langs den loddrette aksen, vil vi kunne få en nokså takket kurve for hele fordelingen ved å trekke rette linjer gjennom de estimerte punktene. Jo mindre bestanden er som vi henter observasjoner fra, jo mer takkete og uregelmessig vil normalt kurven bli.

Om en mener at denne takkete formen skyldes rene tilfeldigheter i materialet, og at strukturen svarer til en jevn kurve, så lønner det seg å benytte denne antakelsen til å reestimere ratene slik at kurven blir jevn. Faren ved dette er at antakelsen kan være gal, dvs. at vi risikerer å fjerne uregelmessigheter som skyldes selve strukturen og ikke tilfeldigheter i materialet. Om det var slik at mange ventet med å registrere sitt samliv til de nådde legal ekteskapsalder, ville dette være et strukturelt trekk som skulle gi uregelmessighet i kurven ved denne alder. Andre muligheter er at den alder hvor store grupper går over fra utdannelse til yrke kan gi økt trang til å gifte seg nettopp i denne alder. Selv om vi ikke skal se bort fra slike faktorer, så er det grunn til å tro at ekteskapsønsker som ikke gir dispensasjonsgrunn er forholdsvis lite utbredt før den legale giftermålsalder, og overgangen utdannelse - yrke er ikke så konsentrert om bestemte aldre at dette skulle gi store avvik fra en jevn kurve.

Det er mange metoder som kan benyttes når en skal reestimere intensitetene, glatte dem, slik at de endelige estimatene ligger på en jevn kurve. Den enkleste metoden er grafisk glatting, dvs. at en for hånd tegner en jevn kurve inn på den grafiske framstilling over råestimatene (ratene fra avsnitt 3), og tegner denne slik at den best mulig samsvarer med det bildetråratene gir. De glattede intensitetene blir da ordinatverdien til denne tegnede kurven for de enkelte aldrene. En annen metode er å bruke glidende gjennomsnitt. Den glattede intensitet er et veid gjennomsnitt av råestimatet for intensiteten selv og intensitetene i de nærmeste aldre. Denne metoden kan varieres både med hvor mange aldre en tar med i hvert gjennomsnitt, og hvilke vekter en vil bruke. En kan velge ut metoden ved et minimeringskriterium, f.eks. for gitt antall aldre velge et vektgrunnlag som minimerer kvadratavviket fra råestimatene.

En tredje metode er på forhånd å velge seg en parametrisk form som en mener den jevne kurven skal ha, og bruke råestimatene til å estimere kurvens parametre ved hjelp av et minimeringskriterium, f.eks. minste kvadraters metode eller den modifiserte kji-kvadrat-minimeringsmetoden. Parametriseringen har den fordelen at hele fordelingen entydig blir bestemt av et lite antall parametre. Når disse er kjent, så er dermed alle egenskapene, som arealet under kurven, momenter, median, fraktiler etc. gitt. Vi kan studere utviklingen i fordelingen over tid ved bare å se på hvordan et lite antall parametre har utviklet seg i stedet for å følge utviklingen i 80-90 intensiteter.

Problemet ved parametrisering (analytisk glatting) er valget av funksjonsform. Det eneste en har å gå etter her, er å prøve seg fram og se hvordan de forskjellige formene passer. En funksjonsform som har vist seg nyttig for glatting av fødselsintensiteter, og som har en grafe som synes å passe bra også for ν (x), er Hadwiger-funksjonen

$$(2) \qquad \nu(x) = \frac{RH}{T\sqrt{\pi}} \left(\frac{T}{x-d}\right)^{\frac{3}{2}} \exp\left[-H^2 \left(\frac{T}{x-d} + \frac{x-d}{T} - 2\right)\right]$$

hvor R, H, T og d er funksjonens parametre. Vi har her at $\int_0^\infty \nu(x)\,dx = R$, dvs. at $\frac{\nu(x)}{R}$ kan tolkes som en sannsynlighetstetthet.

Hoem & Berge (1975) har argumentert for en reparametrisering av Hadwiger-funksjonen, med nye parametre θ_1, θ_2, θ_3 og θ_4 hvor

(3)
$$\begin{aligned}\theta_1 &= R\\ \theta_2 &= d + T\\ \theta_3 &= \tfrac{1}{2} T^2 H^{-2}\\ \theta_4 &= d + T \left[\left(1 + \tfrac{16}{9} H^4\right)^{\frac{1}{2}} - 1 \right] \tfrac{3}{4} H^{-2}\end{aligned}$$

Her er θ_2 forventningen, θ_3 modalverdien og θ_4 variansen i fordelingen til $\frac{\nu\,(x)}{R}$. Det er en entydig sammenheng fra vektoren (d, T, H) til vektoren (θ_2, θ_3, θ_4), men sammenhengen fra (θ_2, θ_3, θ_4) til (d, T, H) blir ikke entydig. Et av poengene med reparametriseringen er at mens det kan konstrueres tilfeller hvor svært ulike sett av (d, T, H)-vektoren kan gi samme grafen, er dette ikke tilfelle for vektoren (θ_2, θ_3, θ_4). Videre har θ-parametrene greie tolkninger som de opprinnelige parametrene ikke har.

Om vi setter

(4) $$\nu\,(x) = \frac{f\,(x)}{1-F\,(x)} \text{ hvor } F\,(x) = \int_0^x f\,(s)\,ds,$$

så blir f (x) sannsynligheten for at et nyfødt menneske skal gjennomføre sitt første giftermål i alderen x (ved kontinuerlig alder blir f (x) tettheten, dvs. at f (x) dx blir sannsynligheten for at personen gifter seg mellom alder x og x + dx, tilnærmet). Coale & McNeil (1972) har benyttet denne funksjonsformen for f (x):

(5) $$f\,(x) = \frac{C\lambda}{\Gamma\,(\frac{\alpha}{\lambda})} \exp \left[-\alpha\,(x-\mu) - e^{-\lambda\,(x-\mu)} \right]$$

Her er $\int_0^\infty f\,(x)\,dx = C$, dvs. at C blir sannsynligheten hos en nyfødt for å bli gift dersom han ikke dør før han har gjennomlevd alle mulige giftermålsaldre. $\frac{f\,(x)}{C}$ blir en ordinær sannsynlighetstetthet, med følgende egenskaper:

$$\text{forventning} = \mu - \frac{1}{\lambda} \frac{\Gamma'(\frac{\alpha}{\lambda})}{\Gamma\,(\frac{\alpha}{\lambda})}$$

$$\text{modalverdi} = \mu - \frac{1}{\lambda} \ln\,(\tfrac{\alpha}{\lambda})$$

$$\text{varians} = \frac{\Gamma\,(\frac{\alpha}{\lambda})\,\Gamma''\,(\frac{\alpha}{\lambda}) - \left[\Gamma'\,(\frac{\alpha}{\lambda})\right]^2}{\lambda^2 \left[\Gamma\,(\frac{\alpha}{\lambda})\right]^2}$$

Ved å sette denne parametriske formen for f (x) inn i (4), får vi at ν (x) blir en funksjon av x i eksakt de samme parametrene C, λ, α og μ.

I dette oppsettet er parameteren μ den laveste giftealder. Om denne er konstant eller eksogent (f.eks. juridisk) bestemt, gir dette at vi her bare har 3 parametre som skal estimeres, mot 4 i Hadwiger.

Også her får vi at etter å ha satt inn i (4) og fått ν (x) parametrisert, så kan $\frac{\nu\,(x)}{\int_0^\infty \nu\,(x)\,dx}$ tolkes som en sannsynlighetstetthet. Men siden (4) er en noe komplisert sammenheng mellom f (x) og ν (x), så vil $\frac{\nu\,(x)}{\int_0^\infty \nu\,(x)\,dx}$ og $\frac{f\,(x)}{C}$ ikke ha sammenfallende momenter og modalverdi. Ved å benytte (1.8) i Coale & McNeil (1972), får vi ved å sette (5) inn i (4) at

(6) $$\nu\,(x) = \left[\frac{1-C}{C\,\lambda}\,\Gamma\,(\tfrac{\alpha}{\lambda}) \exp\,(\alpha\,(x-\mu) + e^{-\lambda\,(x-\mu)}) + \frac{1}{\alpha} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Gamma\,(1+\frac{\alpha}{\lambda})}{\Gamma\,(j+1+\frac{\alpha}{\lambda})}\, e^{-j\lambda\,(x-\mu)} \right]^{-1}$$

Selv om vi i (4) har en entydig sammenheng fra f (x) til ν (x), som gjør at ν (x) vil avhenge av parametrene til f (x), så er sammenhengen såpass komplisert at det blir svært tungt å finne de interessante egenskapene til ν (x)-funksjonen fra parametrene til f (x). Av (4) får vi at

(7) $$f(x) = \nu(x)\, e^{-\int_0^x \nu(s)\, ds}$$

som også er en entydig sammenheng. Om vi setter (2) inn i (7), vil dette gi et like komplisert uttrykk som vi fikk i (6), hvor egenskapene til f (x) vanskelig lar seg avlede av parametrene til ν (x).

Selv om funksjonen $\frac{\nu(x)}{\int_0^\infty \nu(x)\, dx}$ gir et areal under kurven lik 1, og at den derfor kan behandles som en sannsynlighetstetthet med definerte momenter og fraktiler, har den ingen naturlig sannsynlighetstolkning, og det er vanskelig å gi noen lettfattelig illustrasjon av hva disse målene egentlig uttrykker. Funksjonen $\frac{f(x)}{C}$ har derimot en naturlig tolkning som sannsynlighetstettheten for alder ved førstegangs giftermål hos en nyfødt, gitt at vedkommende blir gift. C kan tolkes som sannsynligheten for at den nyfødte blir gift, gitt at dødeligheten ikke forhindrer giftermålene. Fraktilene og momentene her har klare tolkninger i dagligtalen. For de enkelte aldre derimot, er det intensitetene ν (x) som har den greieste tolkning, siden det er disse som viser den giftermålstilbøyeligheten som faktisk gjelder for de som har muligheten til å gifte seg. For enkeltaldrene er det altså ν (x) som gir den greieste informasjon, mens det for kurven som helhet er f (x) som gir de beste tolkningsmuligheter.

P.g.a. at sammenhengene (4) og (7) er såpass uhåndterlige, kan det være fordelaktig å beregne både f (x) og ν (x) direkte fra data, og foreta glattingen for hver av kurvene separat, framfor å gå via de formelle sammenhengene. Råestimater for f (x) kan f.eks. være antall giftermål dividert på middelbestanden i hele aldersklassen, dvs. at både gifte og ugifte inngår i nevneren. For begge funksjonene blir det nå et rent empirisk spørsmål hvilken funksjonsform som bør velges. Det kan tenkes at høyresiden i (2) også egner seg til å glatte f (x), og at høyresiden i (5) også egner seg til å glatte ν (x).

Det er godt mulig at en parametrisk form som gir god dataføyning for enkelte tidspunkter viser seg svært dårlig for andre. Og det er ikke noe som tilsier at det er den samme funksjonsformen som bør velges for kohort- og periodefordelingen. Som nevnt er en av fordelene ved å glatte ved hjelp av parametrisering at en reduserer den tallmengden som trengs for å gi en fullstendig beskrivelse av ratenes aldersfordeling, helt ned til 3-4 parametre. Utviklingen over tid kan dermed studeres ved å se på tidsutviklingen til disse parametrene. Vi må m.a.o. velge oss en bestemt funksjonsform, og estimere parametrene i denne for hvert år i det aktuelle tidsrom. Selve valget av funksjonsform bør foretas ved et mindre antall prøveår (perioder respektive kohorter) som bør være mest mulig forskjellige i fordelingsstrukturen for å sikre at den valgte form gir en god glatting for hele det spenn av fordelinger som en vil benytte den til å beskrive. Om en får beregnet hvordan parametrene i den valgte funksjonsform (f.eks. θ_1, θ_2, θ_3, θ_4) utvikler seg fra år til år, kan et videre prosjekt være å knytte forklaringsvariable til disse, av typen

(8) $$\theta_i = \theta_i\,(a, b, c, d, ..)$$

hvor en kan bruke tidsseriedata for θ_i under jakten på de relevante argumentene a, b, c, d, ...

6. Framskrivinger ut fra modellen for 1. gangs giftermål

Som nevnt i avsnitt 4, inneholder de siste periodefordelingene ferskere informasjon enn den som vi får fra fordelingen til den yngste fullførte kohortfordelingen. Det er derfor vanlig å benytte periodefordelinger til framskrivingsformål.

Det vanlige opplegget som brukes i de offisielle befolkningsframskrivingene (NOS A 307 (1969), NOS A 468 (1972), NOS A 523 (1972), NOS A 762 (1976)), her for fødsels-, døds- og flytterater siden ekteskapelig status foreløpig ikke inngår, er å gjøre enkle forutsetninger om de framtidige periodefordelingene på bakgrunn av de sist observerte fordelinger. Den enkleste framskrivingsforutsetning er å forutsette at periodefordelingen holder seg uendret, eventuelt at den holder seg lik gjennomsnittet av de siste observerte fordelingene. Eller en kan forutsette at alle rater i fordelingen endrer seg med samme forutantatte prosentsats.

Andre metoder for framskrivinger ut fra periodefordelingene kan være å sette opp differensrelasjoner, f.eks. forutsette at endringen i ratene skal være konstant i stedet for at selve ratene skal være konstante, eller si at differenser av høyere orden skal være konstante. Her finnes m.a.o. et utall av muligheter for å velge seg forutsetninger. Ved å bruke lengre tidsserier av tilbakegående tall, kan en ved tidsserieanalysemodeller (Saboia(1974))bruke tallmaterialet til å fastlegge formen på differensrelasjonen.

I NOS A 762 (1976) har en innskrenket seg til å si at alle rater i fordelingen skal endres med samme prosentsats. Ved å gjøre enkle differensmodellforutsetninger eller ved å bruke tidsrekkeanalyse på de aldersspesifikke ratene, vil vi kunne få at ratene for de enkelte aldre endrer seg i forskjellig takt. Men det vil være arbeidskrevende å skulle estimere en egen tidsutviklingsrelasjon for hver enkelt av de 80-90 aldersspesifikke ratene. Ved en parametrisering kan vi få tatt hensyn til alle mulige variasjoner i fordelingen (så lenge funksjonsformen er tilstrekkelig fleksibel), og det blir bare et fåtall størrelser (3-4) som vi behøver å estimere tidsutviklingsrelasjoner for.

Om en først er villig til å gjøre forutsetninger om tidsutviklingen til fordelingsfunksjonen, så er det fullt mulig å benytte også kohortfordelingene til framskrivingsformål. En kan f.eks. estimere tidsutviklingsrelasjoner for parametrene ved hjelp av tallene til de fullførte kohortene, og bruke dette til å beregne fordelingen til de kohortene som først i framtida blir ferdige med sine ekteskapsinngåelser. Men selv om dette rent teknisk er samme metode som for periodefordelingene, og at en ved tidsserieanalyse kan forbedre antakelsen om utviklingen i ratene, så gjelder det fortsatt at vi må bruke gamle tall som framskrivingens utgangspunkt for de lavere aldre. Vi får m.a.o. ikke utnyttet den informasjon som ligger i ratene til de uferdige kohorter.

En fire-parameters fordeling er det i prinsippet mulig å estimere på grunnlag av fire eller flere observasjonspunkter. Jo flere observasjoner, jo sikrere blir i alminnelighet estimatene av parametrene. Det er m.a.o. mulig å anslå parametrene i fordelingen også for de uferdige kohorter. Ved å sette disse parameteranslagene inn i funksjonen, kan en så beregne ratene for de høyere aldre hvor en mangler observasjonene. Det er vanskelig a priori å si hvor mange observasjoner vi trenger (hvor langt kohorten må være kommet) for at parametrene beregnet fra den ufullstendige kohort skal bli tilstrekkelig nær de estimater vi vil få når kohorten i sin tid blir fullført. En mulig framgangsmåte er å ta endel fullførte kohorter og estimere parametrene når vi i hver estimering bare benytter observasjonene opp til en alder som kan varieres fra beregning til beregning. Vi vil så finne hvor langt ned vi kan gå i denne siste observasjonsalder før parameteranslagene avviker for mye fra anslaget for den fullførte kohort. Har vi et bestemt nøyaktighetskrav, kan vi dermed finne en estimeringskritisk alder slik at vi for kohorter som har nådd denne kan beregne parametrene og dermed ratene for de siste uobserverte aldrene.

Keyfitz (1972) beskriver en metode for å beregne egenskapene til kohortfordelingen ut fra egenskaper hos periodefordelingene. Vi observerer periodefordelingen i et år hvor den kohorten vi vil studere har nådd alderen A. $R_n(A)$ er et veid n'te-ordensmoment rundt A av aldersskalaen, med de aldersspesifikke ratene i periodefordelingen som vekter, dvs at $R_n(A) = \int_0^\infty (x-A)^n \nu(x)dx$ hvor $\nu(x)$ følger periodefordelingen når x varierer. $R_n^*(A)$ er det tilsvarende momentet i kohortfordelingen. Ved å bruke en Taylorrekke, får vi at

$$(9) \qquad R_n^*(A) = R_n(A) + \dot{R}_{n+1}(A) + \frac{\ddot{R}_{n+2}(A)}{2!} + \ldots$$

hvor prikkene markerer tidsderivater. Leddene i summen blir raskt svært små. Det vil si at vi får kohortfordelingens momenter ved å ta periodemomentene og endringene (derivatene) av disse. Den implisitte forutsetningen bak denne formelen er at periodefordelingens tidsutvikling er gitt ved de kjente deriverte av alle ordener opp til uendelig, og dermed vil også kohortfordelingen være gitt for de framtidige og uferdige kohorter. Nå er imidlertid momentene rundt alderen A en nokså uhensiktsmessig representasjon av fordelingen, selv om overgangen til andre parametre i prinsippet skal kunne følge når funksjonsformen er kjent. For orden 0 derimot er momentet uavhengig av A og lik arealet under kurven.

Denne sentrale parameter kan vi m.a.o. få ved å benytte (9) og ta med så mange ledd som vi mener er nødvendig.

Selv om vi med kohortbetraktninger benytter forutsetninger og metoder som tillater oss å anslå også de uferdige kohorter, så vil vi være på svakere grunn for de yngre aldre enn ved ferske periodebetraktninger. Fordelen med kohortbetraktningen er at vi får tatt hensyn til kohortens tidligere erfaringer. Spesielt for kohorter som har gjennomlevd størstedelen av sin ekteskapshistorie, kan det gi økt sikkerhet i framskrivingen å ta hensyn til dette, f.eks. ved å estimere parametrene ut fra de tilgjengelige observasjoner og beregne kohortens framtidige rater ut fra dette. For de yngre vil ekteskapshistorien være kortere, og det vi taper på å bruke eldre informasjon eller ved å legge på forutsetninger slik at vi kan bruke kohortframskrivinger, vil antakelig være større enn det vi vil vinne på å få med denne kohorttankegangen. For disse aldre er derfor periodeframskrivinger å anbefale. Det å bruke forskjellige framskrivingsmetoder for forskjellige aldre har sine åpenbare svakheter når en skal tolke resultatet, f.eks. utviklingen i forventet giftermålsalder og andel ugifte i de framskrevne kohort- og periodefordelingene. Periodeframskrivinger virker derfor som den beste metoden når en vil framskrive befolkningen som helhet, mens kohortmetoden kan være nyttig for framskrivinger av kohorter som har mye av sin historie bak seg, og for analyseformål ellers.

7. Modell med flere statusgrupper

Modellen fra avsnitt 3 delte befolkningen inn i to statuser, de som aldri har vært gift og de andre. Fig. 1 gir den tilsvarende skjematiske oppstilling over de overgangsmuligheter som eksisterer.

For de som har opplevd sitt førstegangs giftermål, finnes det også flere muligheter for den ekteskapelige status. Vi skiller mellom gift, skilt og enke(-mann). Fig. 2 gir den tilsvarende skjematiske oppstilling, hvor pilene angir overgangsmulighetene og symbolene angir de tilhørende intensiteter.

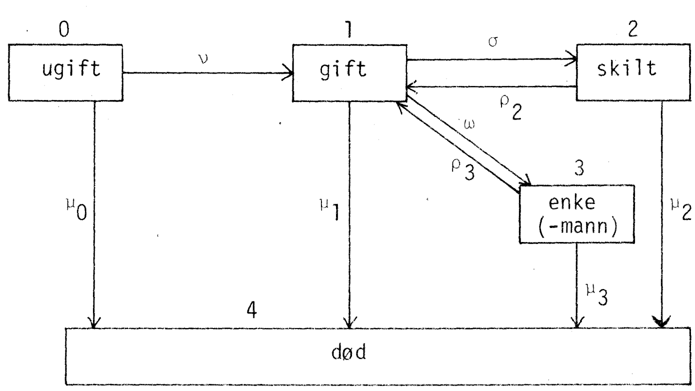

Fig. 2

Her vil ν estimeres på eksakt samme måte som før, og alt som er sagt om ν i forbindelse med modellen fra avsnitt 3, har fortsatt full gyldighet.

Om vi setter $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$, så blir denne modellen i alle sammenhenger utelukkende en oppsplitting av førstegangsgiftermålsmodellen, hvor statusen gift + før gift nå er delt i tre. I alle framskrivinger, analyser, tolkninger så vil de konklusjonene vi kommer fram til her tilsvare konklusjonene fra førstegangsgiftermålsmodellen etter at vi har "lagt sammen" konklusjonene for de tre statusene.

Mens vi har lange tilbakegående tallserier for både overganger og bestand for alle størrelser i førstegangsgiftermålsmodellen, er tallmaterialet for σ og ω og dermed også bestandstallene for status 1, 2 og 3, bare tilgjengelig fra nyere tid (1960-årene og nyere). For σ, ω, ρ_2 og ρ_3 kan vi derfor ikke få noen lengre tidsserier, og vi vil heller ikke kunne få noen fullførte kohortfordelinger.

Setter vi at $\mu_1 \neq \mu_2 \neq \mu_3$, dvs. differensiell dødelighet, så kan vi ikke lenger tolke status 1, 2 og 3 som en ren oppsplitting av statusen gift + før gift fra førstegangsgiftermålsmodellen. Skal vi f.eks. bruke modellene til å gi prediksjonsutsagn, så vil vi i flerstatusmodellen få at antall dødsfall blant dem som ikke er i status 0 (ugift) avhenger av hvordan utgangsbestanden fordeler seg mellom status 1, 2 og 3, og av bevegelsen mellom disse. Vi vil derfor få et framskrivingstall for antall personer i disse statusene som sammenlagt ikke blir det samme tallet som den tilsvarende framskriving i førstegangsgiftermålsmodellen gir. Tolker vi modellen fra fig. 1 som en aggregert framstilling av modellen fra fig. 2, kan vi bruke samme regneopplegg som i avsnitt 10, og vi får at μ_G blir et veid gjennomsnitt av μ_1, μ_2 og μ_3, hvor vekten til μ_i er status nr. i's andel av befolkningen som er gift + før gift, i den enkelte aldersklasse. Dvs. at selv om μ_1, μ_2, μ_3 forutsettes konstante, så vil μ_G endres etter som bestandens fordeling innen de tre statusene endres, mens vi i førstegangsmodellen regner μ_G som konstant over tid for den enkelte alder.

Tønnesen (1973) viser at μ_2 og μ_3 er systematisk større enn μ_1. Størrelsesordenen på tallene er imidlertid så liten at for rene framskrivingsformål vil dette ikke gi store utslag. Tønnesen har dessuten regnet de separerte sammen med de gifte. Foruten de problemer i statusavgrensningen dette skaper ved at overgangen separert-gift ikke registreres, så utgjør de separerte en meget stor andel av sekkegruppen separert + skilt (i 1950 : over 50% for aldre under 25 år, over 30% for aldre under 40 år, over 20% for aldre under 60 år, menn) slik at Tønnesens tall for differansen mellom μ_1 og μ_2 kan være påvirket av denne definisjonsforskjellen. Men det er klart påvist at dødeligheten varierer med ekteskapelig status, og det er et spørsmål om nøyaktighetskrav i forhold til formålet om vi skal regne med felles eller med differensiell dødelighet.

Også her er intensitetsestimatorene vi får ved ratene mellom antall overganger og risikobestanden, asymptotisk uavhengige av hverandre. I analysen av mønsteret for ekteskapsinngåelse og ekteskapsoppløsning kan vi derfor se bort fra dødeligheten og bare konsentrere oss om de øvrige intensitetene.

8. Årsaksfaktorer for intensitetene

Som nevnt i avsnitt 2, vil intensitetene variere med variable som er knyttet til det enkelte individ eller den enkelte gruppe av individer. For ν har vi spesielt sett på avhengigheten av alder, dvs. at vi har skrevet ν (x) hvor x er individets alder.

For ν og μ_0, μ_1, μ_2, μ_3 er det naturlig å innskrenke seg til alder som demografisk årsaksfaktor. For gjengifte og ekteskapsoppløsning, dvs. ρ_1, ρ_2, σ og ω, kan også andre faktorer vise seg å være like viktige. Slike faktorer er varigheten av inneværende status, antall tilbakelagte ekteskap, og antall barn. Hoem (1970) viser en modell hvor antall tilbakelagte ekteskap inngår. Skal en ta med flere årsaksfaktorer, kommer en fort opp i et svært stort antall forskjellige intensiteter som skal estimeres, og datagrunnlaget kan bli for lite til å få estimert disse. Om en forutsatte en parametrisk sammenheng fra årsaksfaktorene til intensiteten (framfor å estimere en ny intensitet for hver verdi av årsaksfaktorene), blir databehovet mindre. Men det kan være noe hasardiøst å sette opp en slik form. En vil da også kunne få identifikasjonsproblemer ved estimering av parametrene i en slik funksjonsform, siden vi har en gjensidig avhengighet mellom utviklingen i barnetall og i ekteskapelig status.

Med det nåværende datasystem er det ingen lettvint oppgave å få tall for overganger og bestand i de forskjellige statuser fordelt på personenes barnetall og antall tilbakelagte ekteskap. Også tall for varigheten av inneværende status byr det på store problemer å skaffe fram. Men siden dette uten tvil er en viktig forklaringsfaktor (kanskje vel så viktig som alder), og siden dataproblemene her er delvis overvinnelige, tar vi med denne variablen i den videre diskusjonen. De andre får foreløpig ligge. Vi har dermed følgende oppsett for intensitetene: ν (x), μ_i (x) for i = 0, 1, 2, 3; σ (x, u) og ρ_i (x, u) for i = 2, 3. u står her for varigheten av inneværende status, dvs. for en overgang blir dette varigheten av statusen som gjaldt fram til overgangen. Enke-intensiteten ω tar vi nærmere for oss i avsnitt 10.

9. Avhengighet mellom kjønnene

Så langt har modellene bare tatt hensyn til det ene kjønn. For giftermål er det helt åpenbart et samspill mellom kjønnene som resulterer i den observerte begivenhet. Helt åpenbart blir dette for enkeintensiteten ω, hvor det opplagt er makens dødsintensitet som er det helt sentrale, individets egne tilbøyeligheter vil neppe kunne påvirke begivenheten i noen nevneverdig grad.

Ved en kjønnsseparat framskrivning etter flerstatusmodellen er det intet som sikrer likt antall giftermål og skilsmisser for begge kjønn, eller likhet mellom antall døde gifte av det ene kjønn med antall som blir enker (enkemenn) av det annet.

Vi kan tenke oss at flerstatusmodellen i avsnitt 7 er en forenkling av følgende detaljmodell:

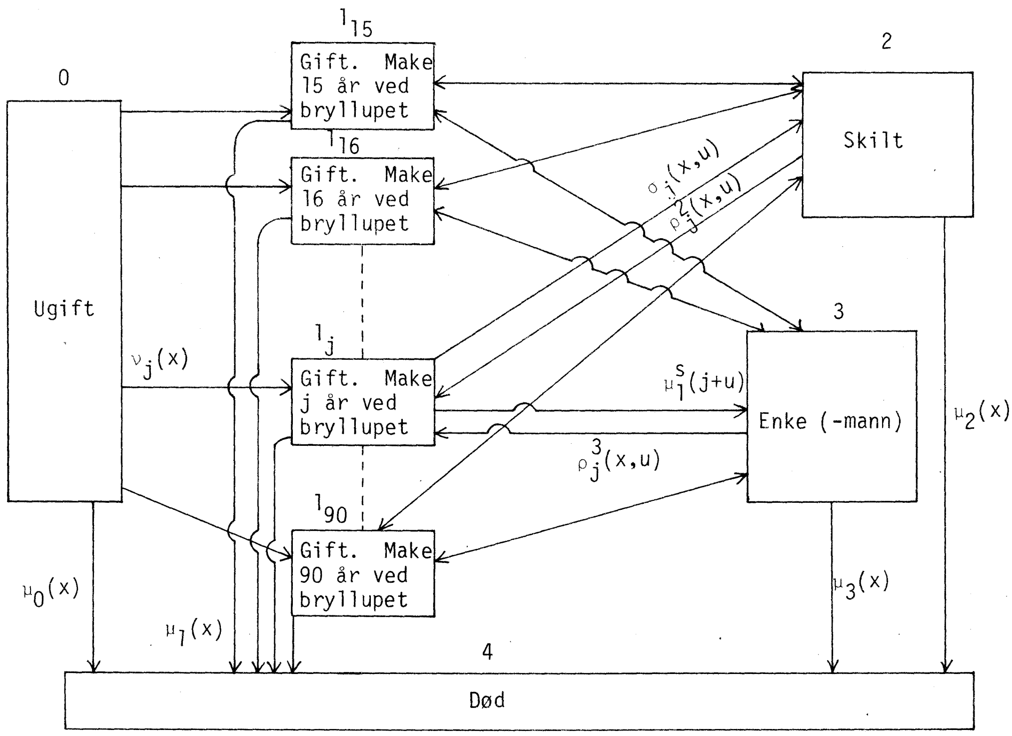

Fig. 3

Modellen gjelder for det ene kjønn. Statusen gift er splittet opp etter partnerens alder ved giftermålet. En ugift person i alder x vil ha en intensitet ν_{15} (x) for å bli gift med en 15 år gammel make, intensiteten ν_{16} (x) for å bli gift med en 16 år gammel make, osv. (At siste alder er 90 er helt vilkårlig valgt). Videre er ρ_j^2 (x, u) intensiteten for at en x år gammel person som har vært skilt i u år skal gifte seg med en j år gammel make, og ρ_j^3 (x, u) er tilsvarende for enker (enkemenn). σ_j (x, u) er intensiteten for at en x år gammel person som har vært gift i u år med en make som nå er j + u år (j år ved giftermålet) skal bli skilt.

I stedet for å benytte enke(-mann)-intensiteten ω, har vi satt at en person blir enke(-mann) når ektefellen dør, dvs. at vi kan benytte dødsintensiteten for det motsatte kjønn, kalt μ_1^s hvor s markerer at intensiteten gjelder det annet kjønn. Ektefellens alder ved døden er j + u, slik at ω_j blir identisk lik μ_1^s (j + u). Vi forutsetter her at dødeligheten ikke avhenger av varigheten til inneværende status, jfr. avsnitt 8.

10. Tolkning av begrepene fra flerstatusmodellen innenfor detaljmodellen

Vi bruker modellen fra avsnitt 9, og lar unionen av statusene $1_{15}, 1_{16}, \ldots, 1_{90}$ være status 1. Ved symbolbruken fra avsnitt 2 har vi at $P_{01}(x, x+t) = \sum_{j=15}^{90} P_{01j}(x, x+t)$. Ved hjelp av (1) får vi da at

$$(10) \qquad \nu(x) = \lim_{t\downarrow 0} \frac{\sum_{j=15}^{90} P_{01j}(x, x+t)}{t} = \sum_{j=15}^{90} \lim_{t\downarrow 0} \frac{P_{01j}(x, x+t)}{t} = \sum_{j=15}^{90} \nu_j(x)$$

hvor $\nu(x)$ har tolkning som i modellene fra avsnitt 7 og 3.

Tilsvarende får vi

$$(11) \qquad \rho_i(x, u) = \sum_{j=15}^{90} \rho_j^i(x, u) \text{ for } i = 2,3$$

Lar vi $P(St(x) = i)$ bety sannsynligheten for at personen er i status i ved alder x, får vi at

$$P_{12}(x, x+t) = P(St(x+t) = 2 \mid St(x) = 1) = \frac{P(St(x+t) = 2 \,\&\, St(x) = 1)}{P(St(x) = 1)}$$

$$= \frac{\sum_{j=15}^{90} P_{01j}(0, x) \cdot P_{1j2}(x, x+t)}{\sum_{j=15}^{90} P_{01j}(0, x)}$$

siden vi regner at alle starter i status 0 ved alder 0.

Det gir:

$$(12) \qquad \sigma(x, u) = \lim_{t\downarrow 0} \frac{P_{12}(x, x+t)}{t} = \sum_{j=15}^{90} \frac{P_{01j}(0, x)}{P_{01}(0, x)} \sigma_j(x, u)$$

Dvs. at $\sigma(x, u)$ i flerstatusmodellen fra avsnitt 7 blir et veid gjennomsnitt av $\sigma_j(x, u)$-intensitetene i detaljmodellen, hvor vektene er sannsynligheten for at en gift person med alder x skal ha en make som var j år ved giftermålet.

Tilsvarende blir

$$(13) \qquad \omega = \sum_{j=15}^{90} \frac{P_{01j}(0, x)}{P_{01}(0, x)} \mu_1^s(j+u)$$

dvs. at ω blir en funksjon både av x og u, m.a.o:

$$(14) \qquad \omega = \omega(x, u)$$

Her blir varigheten av ekteskapet en form for indikator for ektefellens alder.

Det er viktig å være oppmerksom på at også detaljmodellen er en enkjønnsmodell, hvor det andre kjønnet kommer inn ved vårt valg av statusrom. Vi har ikke forutsatt noen avhengighet i kjønnenes atferd på ekteskapsmarkedet, en mann følger sin modell uansett hvordan kvinnene velger å opptre og omvendt.

11. Kjønnsavhengighet i detaljmodellen

Både giftermål og ekteskapsoppløsning er hendelser hvor vi åpenbart har en sterk kjønnsavhengighet. Dvs. at det er urealistisk å tro at mennene gifter seg etter sine intensiteter, og at kvinnene gjør det samme. Det må alltid være like mange menn som kvinner som gifter seg, og i enkjønnsmodellene er det intet som sikrer dette.

En måte å innføre kjønnsavhengighet på, er å benytte oppsettet i enkjønnsmodellene, men å si at intensitetene i tillegg til alder og varighet også avhenger av forholdene hos det annet kjønn. Dvs. at vi egentlig har $\nu(x, \ldots)$, $\sigma(x, u, \ldots)$ osv. hvor ... indikerer slike årsaksfaktorer (vi vil likevel benytte skrivemåten $\nu(x)$, $\sigma(x, u)$ osv.).

Vi lar M og K stå for hannkjønn og hunnkjønn, og bruker toppskrifter til å indikere kjønn for intensitetene. M_i (x) og M_i (x, u) står for bestanden av menn i status nr. i med alder x og evnt. med varighet u i inneværende status ($M_i (x) = \sum_u M_i (x, u)$).

For intensitetene i detaljmodellen må på ethvert tidspunkt følgende sammenheng gjelde asymptotisk dersom vi skal ha like mange menn og kvinner som gifter seg:

$$(15) \quad \nu_j^M (x)\, M_0 (x) + \sum_u \rho_j^{2M} (x, u)\, M_2 (x, u) + \sum_u \rho_j^{3M} (x, u)\, M_3 (x, u)$$

$$= \nu_x^K (j)\, K_0 (j) + \sum_u \rho_x^{2K} (j, u)\, K_2 (j, u) + \sum_u \rho_x^{3K} (j, u)\, K_3 (j, u)$$

for alle verdier av j og x. Dette innebærer at intensitetene avhenger av bestanden av begge kjønn i de forskjellige aldre og statuser, og formen på avhengigheten påvirkes av de øvrige giftermålsintensitetene.

Tilsvarende får vi følgende sammenheng for skilsmissene:

$$(16) \quad \sigma_j^M (x, u) \cdot M_{1j} (x, u) = \sigma_{x-u}^K (j + u, u) \cdot K_{1(x-u)}(j + u, u)$$

for alle j, x og u.

Kjønnsavhengigheten ved overgang til enke(-mann) følger av at intensiteten er satt lik dødsintensiteten for gifte av motsatt kjønn, μ_1^s (j + u), hvor s indikerer det motsatte kjønn. Intensiteten avhenger m.a.o. bare av ektemakens alder.

Vi får her at om vi kjenner alle intensitetene for det ene kjønn og alle bestandstallene, vil for det andre kjønn μ_1^s (j + u) være kjent, og σ_j (x, u) kunne utregnes av (16). Men i (15) vil vi bare kjenne den ene siden av likningene pluss bestandstallene på den andre siden. Dvs. at om vi f.eks. har egne anslag for to av intensitetssettene, så vil vi kunne beregne det tredje settet. Eller vi kan ha (15) som en bibetingelse under estimeringen av alle de tre sett av giftermålsintensiteter.

En estimeringsmetode hvor denne kjønnsavhengigheten blir tatt vare på, går ut på å bestemme seg for en bestemt grad av kjønnsdominans. Ved 100% kjønnsdominans estimeres det dominerende kjønnets intensiteter på samme vis som i enkjønnsmodellene. For det dominerte kjønnet beregnes σ-verdiene ved (16). Verdiene for ν-, ρ_1- og ρ_2-intensitetene beregnes foreløpig som i enkjønnsmodellene, og justeres deretter proporsjonalt slik at de justerte estimater tilfredsstiller (15). Her er det det ene kjønnet som gifter og skiller seg, det andre kjønnet blir gift og skilt. Ved delvis kjønnsdominans beregnes foreløpige estimater for begge kjønn som i enkjønnsmodellene. Deretter justerer vi begge kjønns intensiteter inntil de justerte estimater tilfredsstiller (15) og (16). Justeringen kan foretas slik at hver gang den ene siden i likningen er justert med 1% skal den andre siden justeres med a % inntil likningen stemmer, og hvor a bestemmes av den valgte kjønnsdominans. a = 1 gir lik dominans (50%) til begge kjønn.

12. Kjønnsavhengighet i flerstatusmodellen fra avsnitt 7

Detaljmodellen er som sagt for oppsplittet til at den er anvendelig for de fleste praktiske formål. Men tankegangen fra avsnitt 11 kan anvendes temmelig analogt på flerstatusmodellen fra avsnitt 7. I denne modellen vil kjønnssammenhengene være slik:

$$(17) \quad \sum_x \left[\nu^M (x)\, M_0 (x) + \sum_u \rho_2^M (x, u)\, M_2 (x, u) + \sum_u \rho_3^M (x, u)\, M_3 (x, u) \right]$$

$$= \sum_x \left[\nu^K (x)\, K_0 (x) + \sum_u \rho_2^K (x, u)\, K_2 (x, u) + \sum_u \rho_3^K (x, u)\, K_3 (x, u) \right]$$

$$(18) \quad \sum_x \sum_u \sigma^M (x, u)\, M_1 (x, u) = \sum_x \sum_u \sigma^K (x, u)\, K_1 (x, u)$$

$$(19) \quad \begin{cases} \sum_x \sum_u \omega^M (x, u)\, M_1 (x, u) = \sum_x \mu_1^K (x)\, K_1 (x) \\ \sum_x \mu_1^M (x)\, M_1 (x) = \sum_x \sum_u \omega^K (x, u)\, K_1 (x, u) \end{cases}$$

Siden denne modellen er mer aggregert enn detaljmodellen fra avsnitt 9, så vil vi her få mer igjen til estimering for det ene kjønn selv når det andre er 100% kjønnsdominerende. I realiteten betyr dette at vi ikke får fram i modellen mange av de kjønnssammenhengene som vi vet virker, f.eks. at sjansen for giftermål i en bestemt alder ikke bare avhenger av antallet giftelystne totalt for begge kjønn, men også av aldersfordelingen.

Her kan vi også velge grad av kjønnsdominans og deretter justere de opprinnelige estimatene inntil (17), (18) og (19) stemmer, på samme vis som i avsnitt 11.

13. Metoder for framskrivinger og analyser

I førstegangsgiftermålsmodellen fra avsnitt 3, har vi ingen tilsvarende kjønnssammenheng i totaltallene som vi fikk i de andre modellene. Dette fordi et giftermål godt kan være førstegangsgiftermål for den ene og gjengifte for den andre part. Like fullt eksisterer det også her en form for sammenheng, selv om vi i f.eks. framskrivinger ikke vil få inkonsistens ved å bruke enkjønnsmodeller for begge kjønn separat.

Formlene for kjønnssammenhengen i flerstatusmodellen ville blitt noe enklere om vi hadde sett bort fra varighet som forklaringsvariabel, samtidig som intensitetene ville bli noe enklere å estimere.

Et alternativ til oppsplitting etter ektefellens alder ved giftermålet, kan for ekteskapsoppløsningen være å gruppere hendelsene etter ektefellens alder ved hendelsen. Oppsplittingen etter ektefellens alder kan gjennomføres både med og uten varighetsavhengighet, samtidig som det kan være en indikator på varigheten.

En metode for tokjønnsframskrivinger hvor intensitetene bare avhenger av alder, er gitt i Spøhr (1972) og (1973). Hver hendelse angår begge kjønn. Ved modellen for det ene kjønn anslås antall hendelser av de forskjellige slag fordelt på dette kjønnets alder. Dermed kjenner en totaltallet for de enkelte hendelser hos det annet kjønn. Aldersfordelingen hos det annet kjønn fås ut fra en fordelingsnøkkel for hver alder hos det kjønn vi bruker intensitetene til. Om vi framskriver for menn og får at 500 menn i alderen 25 år skiller seg, så bruker vi aldersfordelingen for konene til 25-årige gifte menn til å beregne hvilken aldersfordeling de 500 skilte kvinnene har. Tilsvarende for død/gjenlevende ektefelle. For giftermål brukes en analog fordelingsfunksjon for ektemakens alder. Kjønnsdominansen bestemmer hvor stor del av befolkningen vi vil framskrive ut fra mannens og hvor stor del ut fra kvinnens intensiteter.

Det enkleste opplegg er å se bort fra all kjønnsavhengighet, og bare framskrive og analysere ut fra en modell for det ene kjønnet. Dette betyr at vi går ut fra fullstendig kjønnsdominans for dette kjønnet. Om det ikke er fullstendig kjønnsdominans, så vil den vanlige estimeringsmetoden for intensitetene være misvisende, fordi vi i estimeringen ikke tar hensyn til alle de sammenhengene som gjelder i den mer fullstendige datagenererende modell.

Siden det kompliserer beregningene å ta hensyn til kjønnsavhengigheten, er det av interesse å vite hvilke tallmessige konsekvenser det kan ha å se bort fra den. En indikator på dette kan vi få ved å estimere intensitetene både for menn og kvinner ut fra enkjønnsmodeller, med data for det samme kalenderår. Deretter kan vi for hvert kjønn lage separate framskrivinger, f.eks. etter modellen fra avsnitt 7. Vi vil da neppe få like mange gifte henholdsvis skilte menn som kvinner. Størrelsen på dette avviket vil gi en indikator på hvor mye det har å si om vi ser bort fra kjønnsavhengigheten under estimeringen i enkjønnsmodellene.

Skal vi ta hensyn til kjønnsavhengigheten må vi vite graden av kjønnsdominans. Dette kan en ha en mening om ut fra kjennskap til kjønnsrollemønstrene på ekteskapsmarkedene og blant de gifte. I mange samfunn vil det være rimelig å anta sterk mannlig kjønnsdominans, det er mannen som frir og som har økonomiske muligheter til å skille seg. Forholdene i dagens Norge, med bedrede yrkesmuligheter for kvinnene og hvor likestillingstanken har fått økt utbredelse blant de aktuelle aldersgrupper, gir mindre grunn til å anta 100% mannlig dominans. Overgangen fra et kjennskap til holdninger og økonomiske muligheter for de ulike kjønn og statuser til et bestemt tall for kjønnsdominansen, er det vanskelig å gi regler for. De forsøk som har vært gjort, har tatt utgangspunkt i kjønnsproporsjonen og forskjellige aldersspesifikke varianter av denne.

En metode som tar utgangspunkt i enkjønnsmodellen, men som likevel trekker inn kjønnsavhengighetstanken, er å la kjønnsproporsjonen inngå som et argument for intensitetene i tillegg til alder og varighet. Også her kan kjønnsproporsjonen gjøres spesifikk for de aldre vi mener har størst betydning, f.eks. slik at vi for ν^M (22) konsentrerer oss om antall ugifte kvinner 16-24 år i forhold til menn 18-26 år. Eller vi kunne valgt å uttrykke kjønnsproporsjonen i veide gjennomsnitt av aldre hvor vektgrunnlaget kan bestemmes av aldersfordelingen for ektemaker til 22-årige brudgommer. Tanken samsvarer med konklusjonen fra avsnitt 11 hvor vi fant at alle bestandstallene for menn og kvinner fordelt på alder påvirket intensitetene. Men i stedet for å justere intensitetene inntil avhengighetslikningene stemmer, så prøver vi her å dra nytte av tankegangen innenfor den enklere enkjønnsmodellen. Vi vil da i alminnelighet ikke få oppfylt likningene i framskrivingsresultatene, men vi vil antakelig komme bedre ut enn i modeller hvor vi ikke har med noen form for kjønnsproporsjon.

14. Samkopling mellom sivilstandsframskrivinger og befolkningsprognosemodellen

Den nåværende befolkningsprognosemodellen er beskrevet i Sørensen (1975), og kan illustreres slik:

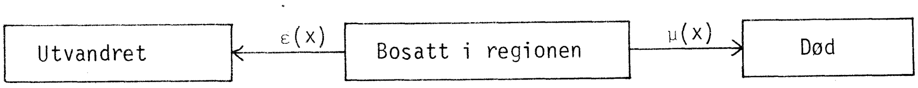

Fig. 4

Personer i statusen "bosatt i regionen" har en fødselsintensitet ϕ (x), men endrer ikke sin status ved fødselen.

Det er en separat modell for hvert kjønn og hver region. ϕ (x) $\equiv$ 0 for menn. μ (x) er estimert felles for alle regioner, men er forskjellig for kvinner og menn. Hver fødsel fører til en ny 0-åring, og hver utvandring fører til at en annen region får en innvandrer med samme kjønn og alder (ingen inn- og utvandring for landet som helhet). Innvandringens fordeling etter region og de fødtes fordeling etter kjønn skjer etter andeler som estimeres analogt med figurens intensiteter.

Skal vi kople sivilstandsfordelingsmodellen sammen med denne befolkningsmodellen, krever dette at vi enten har egne intensiteter for hver sivilstand i befolkningsmodellen, og dessuten egne intensiteter for hver region i sivilstandsmodellen, eller at vi forutsetter ikke-differensialitet mellom ekteskapsstatusene for fødsel, flytting og død, samt ikke-differensialitet mellom regioner for statusoverganger. Enkelte av disse forutsetningene vil være åpenbart sterkt urealistiske (eks. at flyttinger og fødsler skal være uavhengig av sivilstand).

I tillegg kommer problemet med simultanitet i begivenhetene. Som nevnt i avsnitt 2, vil Markovprosessopplegget ikke ta hensyn til at beslutningen kan være tidsmessig avsondret fra realisasjonen for en hendelse. Derfor kan hendelser som skyldes samme beslutning bli realisert på forskjellige tidspunkter, og vil i de fleste opplegg bli betraktet som om de var uavhengige. Dette kan hjelpes på ved å innføre varighetsavhengige intensiteter, men dette vil fort bli et meget komplisert modellopplegg som kan bli tungt anvendelig.

Videre kommer problemene med hendelser som ligger nær hverandre i tid. Approksimasjonen risikotid ≈ årets middelbestand blir dårligere jo flere hendelser en person har pr. år. Samtidig vil intensitetene vanskeligere kunne tolkes som sannsynlighet for overgang innen ett år når vi har muligheter for flere overganger i året.

Mønnesland (1975) har en opptelling av registrerte flyttinger og statusoverganger i 1972 som viser at blant menn hadde 32% av dem som giftet seg flere hendelser i samme år, blant kvinner 37%. Selv om vi her har rene registreringseffekter (eks. at det ved giftermålsregistreringen blir oppdaget manglende flyttemelding, og dermed blir det meldt en flytting), så tyder det på at vi har en sterk samvariasjon mellom giftermål og flytting som det ikke er lett å ta vare på i prognosemodellen.

I en modell for landsnivå faller de innenlandske flyttinger bort, og vi unngår problemene med å estimere regionale ekteskapsintensiteter (eks. problemet med å regionsbestemme giftermål som skjer i nær tilknytning til flytting). Databehovet blir også ellers mindre for en landsmodell.

En befolkningsmodell for landsnivå er gitt i Brunborg (1974). Modellen har denne oppbygningen:

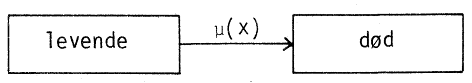

Fig. 5

hvor personer med status "levende" har fødselsintensiteten ϕ (x), men de endrer ikke sin status ved fødselen.

ϕ (x) $\equiv$ 0 for menn, og μ (x) er forskjellig for menn og kvinner. Hver fødsel gir et nytt individ med alder 0, og med kjønnsfordeling av nyfødte etter en estimert kjønnsproporsjon.

Om vi i sivilstandsprognosen ikke regner med differensiell dødelighet etter ekteskapelig status, ville det være mulig å lage en nuptialitetstabell etter modellen

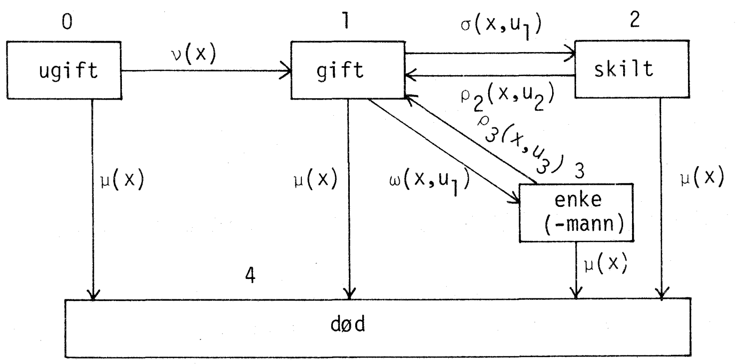

Fig. 6

Befolkningsprognosens tall for kjønn- og aldersgrupper de enkelte år kunne dermed spaltes etter sivilstand etter en slik tabell. Vi behøver bare tallene for utgangsbefolkningen og for antall fødte i de enkelte prognoseårene fra befolkningsprognosen fra figur 5, og deretter vil både befolkningsprognosen og nuptialitetstabellen gi de samme resultatene når vi summerer over sivilstand, siden vi bruker samme dødelighet og ingen av modellene har andre avgangsmuligheter.

Når vi tar hensyn til differensialitet i dødeligheten, vil dette resultere i at totaltallet for dødsfall for et kjønn og en alder vil avhenge av sivilstandsfordelingen. Vi kan derfor ikke vente noen konsistens mellom antall døde i modellen fra avsnitt 7 og befolkningsprognosemodellen fra figur 5. Samkoplingen må i dette tilfellet bestå i en revidering av strukturen i befolkningsmodellen.

Et opplegg er å ta utgangspunkt i modellen fra avsnitt 7, dvs. at ekteskap innledes og oppløses og folk dør etter denne modellen. Ut fra de tall denne modellen gir for antall kvinner i de forskjellige kjønn og aldre, kan vi estimere antall fødsler ut fra fødselsintensitetene. Det enkleste her er å bruke fødselsintensitetene slik som nå, dvs. forutsette ikke-differensialitet i fødsler etter ekteskapelig status. Det vil imidlertid være en lite tilfredsstillende forutsetning. En bør heller bruke separate fruktbarhetsintensiteter for de enkelte statuser.

En slik modell gir ikke-differensialitet både i statusoverganger og død m.h.p. fødselspariteten. Varighetsvariablene gjelder varighet i sivilstanden, uavhengig av passerte fødsler.

Utvidelser ut over dette kan være å trekke inn at antall fødsler kan påvirke sivilstandsovergangen, dvs. at hver fødsel gir en overgang til en status med høyere paritet, og hvor ekteskapsintensitetene er forskjellige for de forskjellige pariteter. En slik utvidet modell vil se slik ut:

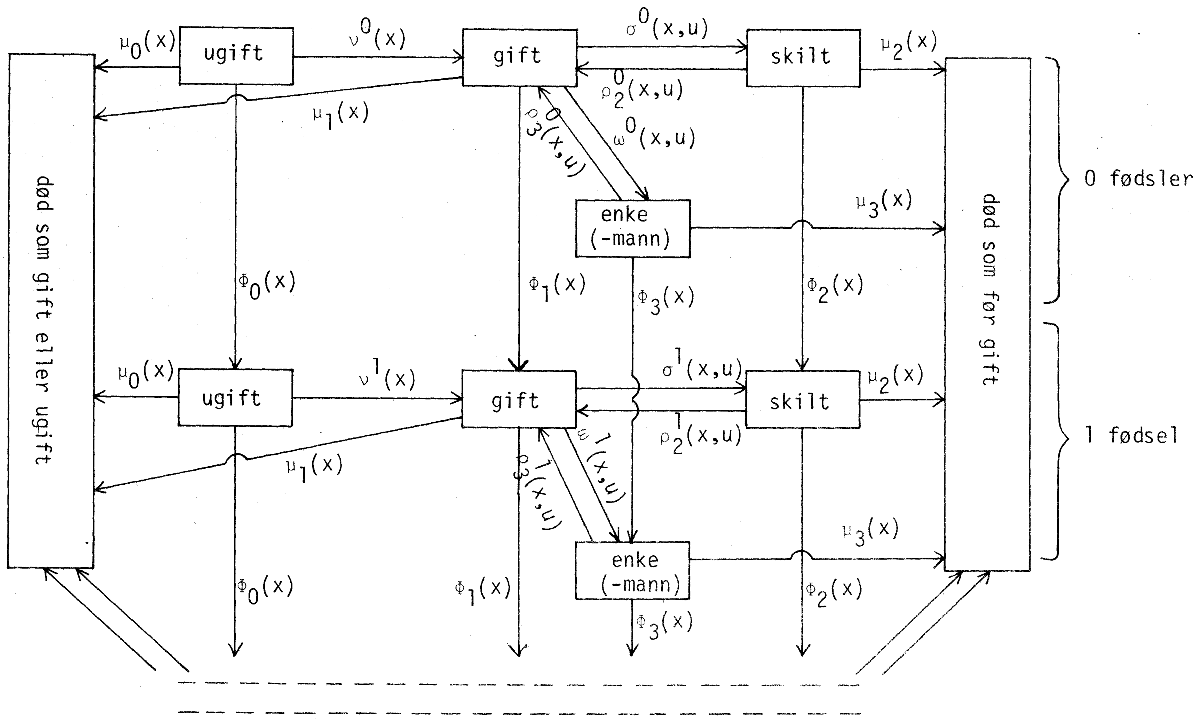

Fig. 7

Toppskriften til intensitetene viser til paritetsavhengigheten. Varighetsvariablene regnes fortsatt som varighet i sivilstanden, uavhengig av paritet.

Som vi ser, blir modellen fort svært komplisert om vi skal ta hensyn til de forskjellige mulighetene til differensialitet i intensitetene (i figur 7 har vi ikke latt ϕ (x) variere med paritet, noe som det er gode grunner til å gjøre). Antakelig er modellen i figur 7 for detaljert til at den er anvendelig i praksis. Dette illustrerer ganske godt at selv nokså selvfølgelige og innlysende forklaringsvariable kan en bli nødt til å kutte ut til fordel for å få en praktisk håndterlig modell.

Referanser

Lena Alnebring (1973): "Sammanboende ogifta". Research Reports from Department of Sociology, Uppsala University

Julie E. Backer (1965): "Ekteskap, Fødsler og Vandringer i Norge 1865-1960". SØS 13, Statistisk Sentralbyrå, Oslo

Gary S. Becker (1973/74): "A Theory of Marriage" I og II. Journal of Political Economy

Erling Berge (1975): "Ekteskapeleg status i Norge 1965-1975. Eit opplegg for analyse". ANO IO 75/37, Statistisk Sentralbyrå, Oslo

Helge Brunborg (1974): "Framskriving av folkemengden i Norge 1973-2100. Et analytisk eksperiment". ART. 69, Statistisk Sentralbyrå, Oslo

Helge Brunborg (1975): "Fruktbarhetsundersøkelse i Norge. Behov og muligheter". ANO IO 76/16, Statistisk Sentralbyrå, Oslo

A. J. Coale & D. R. McNeil (1972): "The Distribution by Age of the Frequency of First Marriage in a Female Cohort". Journal of the American Statistical Association

J. T. Fawcett (1974): "Psychological Determinants of Nuptiality" i: "International Population Conference. Liège 1973", Vol. 2, Liège

O. R. McGregor (1957): "Divorce in England". London

John Hajnal (1953): "The Marriage Boom". Population Index

John Hajnal (1965): "European Marriage Patterns in Perspective" i D. V. Glass & D. E. C. Eversley: "Population in History". London

K. O'Higgins (1974): "Marital Desertion in Dublin". Dublin

Jan M. Hoem (1969): "Concepts of a Bisexual Theory of Marriage Formation". Statistisk tidskrift

Jan M. Hoem (1970): "A Probabilistic Approach to Nuptiality". Biométrie-Praximétrie

Jan M. Hoem & Erling Berge (1975): "Some Problems in Hadwiger Fertility Graduation". Scandinavian Actuarial Journal

Britta Holmbeck (1974): "Giftermålenes och skilsmässornas utveckling efter 1950". Information i prognos-frågor nr. 4. Statistiska Sentralbyrån, Stockholm

Nathan Keyfitz (1965): "On the Interaction of Populations". Demography

Nathan Keyfitz (1972): "On Future Populations". Journal of the American Statistical Association

A. N. Kiær (1873): "Nogle Oplysninger om Forholdet mellom Ægteskaber og Fødsler med særligt Hensyn til Ægteskabernes Stiftelsestid". Christiania Videnskabs-Selskabs Forhandlinger

Inger Koch-Nielsen (1975): "Ægteskabet og loven". Socialforskningsinstituttets publikation nr. 66. København

Walter Mertens (1965): "Methodological Aspects of the Construction of Nuptiality Tables". Demography

Jan Mønnesland (1975): "Kombinasjoner av flere begivenheter for hver person i løpet av ett år". Appendiks i Berge (1975)

NOS A 307 (1969): "Framskriving av folkemengden til 1990". Statistisk Sentralbyrå. Oslo

NOS A 468 (1972): "Framskriving av folkemengden 1971-2000". Statistisk Sentralbyrå. Oslo

NOS A 523 (1972): "Framskriving av folkemengden 1972-2000. Regionale tall". Statistisk Sentralbyrå. Oslo

NOS A 762 (1976): "Framskriving av folkemengden 1975-2000. Regionale tall". Statistisk Sentralbyrå. Oslo

A. Näsholm (1972): "Sammanboende gifta och sammanboende ogifta". Bilag nr. 4 i "Familj och äktenskap I", SOU 41, Stockholm

S.H. Preston & A. T. Richards (1975): "The Influence of Women's Work Opportunities on Marriage Rates". Demography

Per Ramholt (1953): "Nuptiality, Fertility and Reproduction in Norway". Population Studies

Joao L. M. Saboia (1974): "Modelling and forecasting populations by time series: The Swedish case". Demography

Hanne Spøhr (1972): "A matrix model for the distribution of a population according to age, sex and marital status". Statistisk tidskrift

Hanne Spøhr (1973): "Civilstandsfordelinger 1973-88". SBI-Notat 34, Statens Byggeforskningsinstitut, Hørsholm

Eilert Sundt (1855): "Om Giftermål i Norge". Christiania

Knut Ø. Sørensen (1975): "Statistisk Sentralbyrås befolkningsprognosemodell ved de regionale framskrivinger 1975". ART. 80, Statistisk Sentralbyrå, Oslo

Bjørn L. Tønnesen (1973): "Dødelighet og ekteskapelig status i Norge 1960-1962". ANO IO 73/34, Statistisk Sentralbyrå, Oslo

Johan Vogt (1952): "Befolkningsutvikling og ekteskapsstruktur i Norge". Statsøkonomisk Tidsskrift

G. Udny Yule (1906): "On the Changes in the Marriage- and Birth-Rates in England and Wales during the Past Half Century, with an Inquiry as to their Probable Causes". Journal of the Royal Statistical Society

ANALYTISK GLATTING AV GIFTERMÅLSKURVER

av Jan M. Hoem

1. Grunnbegreper

Vi betrakter et medlem av en bestand av ugifte kvinner og ser bort fra inn- og utvandring og dødelighet. Hvis medlemmet gifter seg, lar vi X være hennes giftermålsalder. Ellers lar vi X være udefinert. Sannsynligheten for at en kvinne gifter seg overhodet, kaller vi c. Alle giftermål inngås mellom aldrene a og b (a<b). For et medlem i alder under a har X sannsynlighetsfordelingen H, som vi antar er absolutt kontinuerlig med tettheten h. Siden ikke alle gifter seg, er

$$c = H(b) < 1.$$

Giftermålsintensiteten (intensiteten for første gangs giftermål) defineres som

(1) $$\nu(x) = \frac{h(x)}{1 - H(x)} \qquad \text{for} \quad 0 < x < b.$$

(Vi får $\nu(x) = 0$ for $0 < x \leqq a$.) Vi antar for enkelhets skyld at denne er kontinuerlig, og vet at vi da har

(2) $$H(x) = 1-e^{-\int_0^x \nu(s)ds} \qquad \text{for} \quad 0 \leqq x < b.$$

I en empirisk studie av giftermålsfunksjoner har Coale (1971, pp. 203 ff) forslag som i realiteten går ut på at man skal basere seg på

$$K(x) = P\{X \leqq x \mid X \leqq b\}$$

istedenfor på H(x). Dette innebærer på sett og vis at man konsentrerer oppmerksomheten om dem som blir gift. K blir absolutt kontinuerlig. Hvis vi kaller dens tetthet for k, blir

(3) $$K(x) = H(x)/c, \; k(x) = h(x)/c.$$

Den tilsvarende intensiteten er

(4) $$\gamma(x) = \frac{k(x)}{1 - K(x)} = \frac{h(x)}{c - H(x)} \qquad \text{for } 0 < x < b,$$

i analogi med (1). Tilsvarende (2) får vi

(5) $$K(x) = 1-e^{-\int_0^x \gamma(s)ds} \qquad \text{for } 0 < x < b.$$

Om vi kombinerer dette med (3), får vi at

$$H(x) = c\{1-e^{-\int_0^x \gamma(s)ds}\} \qquad \text{for } 0 \leqq x < b,$$

$$h(x) = c\gamma(x)e^{-\int_0^x \gamma(s)ds} \qquad \text{for } 0 < x < b,$$

og

(6) $$\nu(x) = \frac{c\gamma(x)e^{-\int_0^x \gamma(s)ds}}{1-c\{1-e^{-\int_0^x \gamma(s)ds}\}} \qquad \text{for } 0 < x < b.$$

Omvendt blir

$$(7) \qquad \gamma(x) = \frac{\nu(x)e^{-\int_0^x \nu(s)ds}}{e^{-\int_0^x \nu(s)ds} - (1-c)} \qquad \text{for } 0 < x < b.$$

En har altså likefremme sammenhenger mellom de ulike funksjonene, slik at en i prinsippet lett kan regne seg fra én av dem til hver av de andre.

2. Råestimater

La oss her begrense oss til en situasjon der det foreligger periodedata. Tilfellet med kohortdata er litt enklere (hvis kohorten har nådd minst til alder b ved begynnelsen av observasjons-perioden), så det trenger vi ikke ofre noen oppmerksomhet akkurat nå.

Vi tenker oss ν erstattet av en trappetrinnsfunksjon som er konstant over ettårige alders-intervaller:

$$\nu^{\#}(x) = \sum_\alpha \nu_\alpha I_\alpha(x).$$

Her er $I_\alpha(x) = 1$ for $\alpha \leq x < \alpha + 1$ og 0 ellers, og ν_α representerer (den konstante) giftermålsintensiteten for α-åringer. Vanlige giftermålsrater beregnes som observert antall førstegangs-giftermål dividert med samlet observert levetid som ugift, for hver ettårig aldersklasse. Vi betegner her raten for aldersklassen α med $\hat{\nu}_\alpha$ og betrakter den som en estimator for ν_α. (Her er α heltallig overalt.) Tilsvarende estimatorer for de øvrige funksjonene blir (for heltallige α)

$$(8) \qquad \begin{aligned} \hat{H}(\alpha) &= 1-e^{-\sum_{s=0}^{\alpha} \hat{\nu}_s}, \qquad \hat{c} = \hat{H}(b) \\ \hat{h}(\alpha) &= \hat{\nu}_\alpha\{1-\hat{H}(\alpha)\}, \\ \hat{\gamma}(\alpha) &= \frac{\hat{h}(\alpha)}{\hat{c} - \hat{H}(\alpha)}, \text{ osv.} \end{aligned}$$

3. Analytisk glatting av $\hat{\underset{\sim}{\nu}}$.

La $\hat{\underset{\sim}{\nu}} = \{\hat{\nu}_\alpha : \alpha = a, a+1, \ldots, b\}$. Hvis vi plotter $\hat{\underset{\sim}{\nu}}$ i et diagram, framkommer det vi vil kalle en giftermålskurve. Hvis denne er takket og ikke glatt og pen, er det naturlig å utjevne den. Ved analytisk glatting tilpasser man en pen funksjon til $\hat{\underset{\sim}{\nu}}$. La oss si at funksjonen er $f(x,\underset{\sim}{\theta})$ med parametre $\underset{\sim}{\theta} = (\theta_1,\ldots,\theta_m)$. Den tilpassede funksjonen er $f(x,\hat{\underset{\sim}{\theta}})$.

Selv om $\hat{\underset{\sim}{\nu}}$ er ganske glatt og pen, kan det allikevel være fornuftig å tilpasse en parametrisk funksjon til kurven. En får dermed en pen representasjon av $\nu(x)$ som kan være nyttig både i analyse av giftermålsutviklingen og for prognoseformål.

En slik tilpasset funksjon gir opphav til et nytt sett av estimatorer for de andre funksjonene, som alle kan avledes av $\nu(x)$. Istedenfor (8) får en

$$(9) \qquad \begin{aligned} H^*(x) &= 1-e^{-\int_0^x f(s,\hat{\underset{\sim}{\theta}})ds}, \qquad c^* = H^*(b), \\ h^*(x) &= f(x,\hat{\underset{\sim}{\theta}})\{1-H^*(x)\}, \\ \gamma^*(x) &= \frac{h^*(x)}{c^* - H^*(x)}, \text{ osv.} \end{aligned}$$

På grunn av den form giftermålskurver vanligvis har, vil det være naturlig å bruke samme slags tilpasningsfunksjon som ved glatting av fruktbarhetskurver. Det betyr at en velger en passende sannsynlighetstetthet $g\ (x,\ \theta_1,\ \ldots,\ \theta_{m-1})$ og setter

$$f\ (x,\ \theta_1,\ \ldots,\ \theta_m) = \theta_m\ g(x,\ \theta_1,\ \ldots,\ \theta_{m-1}). \tag{10}$$

For å finne en passende g, må en prøve seg fram. Det eksisterer foreløpig ingen veletablert funksjon som en kan regne med vil passe.

En bør være klar over at parametrene $\theta_1, \ldots, \theta_m$ godt kan ha en helt annen tolkning i forbindelse med giftermålskurver enn det en er vant til fra analysen av fruktbarhetskurver. La oss si at $m = 4$, og at θ_1, θ_2 og θ_3 er henholdsvis modalverdien, forventningsverdien og variansen i fordelingen med tettheten g. Da blir θ_1, θ_2 og θ_3 tilsvarende deskriptive mål for kurven av f, men de er ikke modalverdi, forventningsverdi og varians for giftermålsalderen X. Arealet under kurven til f blir θ_4, idet $\int_a^b g\ (x,\ \theta_1,\ \theta_2,\ \theta_3)\ dx = 1$, og i fruktbarhetsanalysen representerer dette bruttoreproduksjonstallet. I giftermålsanalysen er θ_4 ikke noe tilsvarende, og spesielt er ikke θ_4 lik c. I følge (9) er

$$c^* = 1 - e^{-\int_a^b f\ (s,\ \hat{\underset{\sim}{\theta}})\ ds} = 1 - e^{-\hat{\theta}_4},$$

og tilsvarende er $\theta_4 = -\ln(1-c)$. Det er klart at det er en sammenheng mellom c og θ_4, men θ_4 har ikke noen verbal tolkning, noe "navn". Estimatoren for forventet giftermålsalder er

$$E^* X = \frac{1}{c^*} \int_a^b x f\ (x,\ \hat{\underset{\sim}{\theta}})\ \{1 - H^*\ (x)\}\ dx,$$

giftermålsalderens modalverdi er modalverdien til funksjonen $h^*\ (x)$, og tilsvarende for variansen.

4. Analytisk glatting av $\hat{\underset{\sim}{h}}$

Det er for så vidt i første rekke egenskapene ved h som har en direkte, demografisk tolkning av den typen en er vant til fra andre grener av statistikken. Dette kan være et motiv for å glatte $\hat{\underset{\sim}{h}} = \{\hat{h}\ (\alpha) : \alpha = a,\ a+1,\ \ldots,\ b\}$ direkte istedenfor å gå veien om $\hat{\underset{\sim}{\nu}}$. Det betyr at en velger en parametrisk sannsynlighetstetthet $\bar{g}\ (x,\ \underset{\sim}{\theta})$ og tilpasser denne direkte til $\hat{\underset{\sim}{h}}$, f.eks. ved χ^2-minimering. (En må i så fall se litt på hvilken χ^2-størrelse en skal minimere. Teorien for glatting av demografiske rater må modifiseres. Det er ikke noe stort problem.).

Coale og McNeil (1972) melder om gode resultater med

$$\bar{g}\ (x,\ \underset{\sim}{\theta}) = \frac{1}{\sigma\Gamma(\eta)} \exp\ \{-\eta\ \frac{x - \xi}{\sigma}\ e^{-\frac{x-\xi}{\sigma}}\},\ -\infty < x < \infty,$$

med $\underset{\sim}{\theta} = (\xi,\ \sigma,\ \eta)$. La $\psi\ (x) = \frac{d}{dx} \ln \Gamma\ (x)$. En kan vise at $\bar{g}$ har kumulantgenererende funksjon

$$\kappa\ (s) = \ln \Gamma\ (\eta - s) - \ln \Gamma\ (\eta)$$

når $\xi = 0$ og $\sigma = 1$. Følgelig har $\bar{g}$ forventningsverdien $\xi - \sigma\psi\ (\eta)$ og variansen $\sigma^2\ \psi'\ (\eta)$. Det er også lett å se at $\bar{g}$ har modalverdien $\xi - \sigma \ln \eta$. For $\eta = 1$ reduserer dette seg til Gumbels fordeling (Johnson & Kotz, 1970, kap. 21), som har

forventning $\xi + \sigma \cdot 0.57722 \ldots$ der $0.57722 \ldots$ er Eulers konstant,

varians $\sigma^2\ \psi'\ (1)$, der $\psi'\ (1) = \pi^2/6 = 1.64493$,

og modalverdi ξ.

For $\eta = 1$ er det altså lett å finne momentestimatorer ξ_0 og σ_0 for ξ og σ. Om vi så setter $\eta_0 = 1$, kan $\underset{\sim}{\theta}_0 = (\xi_0,\ \sigma_0,\ \eta_0)$ antakelig være en tilstrekkelig nøyaktig startestimator i en analytisk glatting av $\hat{\underset{\sim}{h}}$

ved hjelp av $\bar{g}$. Under glattingen skal $\bar{g}$ multipliseres med c, dvs. det er $c\bar{g}$ (x, ξ, σ, η) som er glattingsfunksjon, idet h jo skal ha areal c, ikke areal 1 slik $\bar{g}$ har. Jeg antar at $\hat{c}$ i (8) er en tilstrekkelig nøyaktig startestimator for c.

Coale og McNeil (1972) bruker en del energi på å tolke de parametrene de opererer med. Jeg har skiftet parametrisering her i forhold til dem (og har skiftet navn på parametrene), men det bør være mulig å overføre deres tolkning til våre nye parametre. For øvrig viser resultatene om momentene midt på forrige side at enkle funksjoner av våre parametre har en grei momenttolkning.

Vi kan for øvrig også bruke $\bar{g}$ på en annen måte, nemlig som g i (10). Det vil si at vi setter $f = \lambda \bar{g}$ (x, ξ, σ, η) og bruker f til utjevning av $\hat{\underset{\sim}{\nu}}$ istedenfor å bruke $c\bar{g}$ til utjevning av $\hat{\underset{\sim}{h}}$.

5. <u>Analytisk glatting av $\hat{\underset{\sim}{\gamma}}$</u>

Coale (1971, pp. 203 ff) foreslår i realiteten at en skal glatte $\hat{\underset{\sim}{\gamma}}$ istedenfor $\hat{\underset{\sim}{\nu}}$. (Jeg tror ikke at han hadde kommet på at man kunne glatte $\hat{\underset{\sim}{h}}$ analytisk så tidlig.) Han mener at en funksjon på formen

$$(11) \qquad r\,(x, k, a) = \frac{0.174}{k} \exp\{-4.411\, e^{-0.309 \frac{x-a}{k}}\} \text{ for } a < x < b$$

gir utmerket tilpasning i de materialer han betrakter. Han gir også en tolkning av k og angir hvordan en kan finne det vi ville betrakte som startestimatorer for k og a. (Coale går ikke videre når han har funnet startestimatorene. I 1971 kjente han neppe teorien for analytisk glatting, som da ikke var kommet på trykk en gang.)

Det ser jo besnærende ut å forsøke å følge i Coales fotspor. En bør vel da ikke la seg binde av hans empiriske parameterverdier, men i stedet bruke en tilpasningsfunksjon på formen

$$(12) \qquad r\,(x, a, \lambda, \eta, \sigma) = \frac{\lambda}{\sigma} \exp\{-\eta e^{-\frac{x-a}{\sigma}}\} \text{ for } a < x < b.$$

Denne har fire parametre. I denne sammenhengen må parameteren c anslås separat, dvs. ikke i tilknytning til glattingen. En får da fem parametre, mot fire til sammen i de situasjonene vi har betraktet før. Det er mulig at en kunne redusere parametertallet med én ved å fastlegge en empirisk fellesverdi for en av parametrene i r her, slik Coale jo gjør med <u>to</u> av disse parametrene. (Coale har a_0 istedenfor a, k/0.309 istedenfor σ, $\eta = 4.411$, og $\lambda = 0.174/0.309 = 0.563$.)

<u>Imidlertid kan en funksjon som (12) aldri gi en tilfredsstillende tilpasning til γ over hele intervallet $< a, b >$</u>, noe en også kan se av den eneste empiriske illustrasjon jeg kan finne hos ham, nemlig figur 9 på side 204 (Coale, 1971). Vi ser der at den empiriske kurven synes å følge det Coale (s. 203) kaller en "erratic further upward course" for aldre nær b. Coale synes å avfeie dette bildet som observasjonsfeil, og han tar i hvert fall ikke hensyn til det. Imidlertid er det akkurat slik en må vente at en empirisk kurve av denne typen vil oppføre seg, for $\gamma(x) \to \infty$ når $x \uparrow b$. Det innser vi slik:

Siden $K(x) = P\{X \leqq x \mid X \leqq b\}$, er $K(b) = 1$. På grunn av (5) må derfor

$$e^{-\int_a^b \gamma(x)\,dx} = 0,$$

og følgelig $\int_a^b \gamma(x)\,dx = \infty$. Hvis vi betrakter γ som en pen og monoton funksjon (og det gjør Coale helt opplagt), må dette medføre at $\lim \gamma(x) = \infty$ når $x \uparrow b$.

Funksjonen i (12) har imidlertid en form som den i Coales figur 9. Vi får spesielt at

$$r(a) = \frac{\lambda}{\sigma} e^{-\eta} \text{ og } r(\infty) = \frac{\lambda}{\sigma},$$

$$r'(x) = \frac{\eta}{\sigma} e^{-\frac{x-a}{\sigma}} r(x), \qquad r''(x) = \frac{\eta}{\sigma} e^{-\frac{x-a}{\sigma}} r(\nu)\,(\eta e^{-\frac{x-a}{\sigma}} - 1).$$

Når $\sigma = 1/0.309$, $\lambda = 0.563$, $\eta = 4.411$ og $a = 0$, som i funksjonen i Coales figur 9, blir

$$r(a) = 0.174 \cdot e^{-4.411} = 0.002114 \text{ og } r(\infty) = 0.174.$$

Vi ser at vi alltid har $r'(x) > 0$, at $r''(x) > 0$ for $x < x_0 = a + \sigma \ln \eta$, $r''(x_0) = 0$, $r''(x) < 0$ for $x > x_0$, slik at r' har en vendetangent i x_0; og endelig at r' nærmer seg 0 for store nok x. Det siste er den viktigste feilen ved r som tilpasningsfunksjon for γ. En "skikkelig" tilpasningsfunksjon vil trolig ha positiv og voksende annenderivert for x nær b (så lenge $x < b$).

Nå må en ikke overdrive betydningen av dette heller. En dødsintensitet $\mu(x)$ vil også gå mot ∞ når x nærmer seg høyest mulige levealder ω, men dette har aldri forhindret aktuarer i med stort hell å tilpasse funksjonen $\alpha + \beta e^{\gamma x}$ til aldersspesifikke dødsrater, enda $\alpha + \beta e^{\gamma\omega}$ i høy grad er endelig. Hvis en f.eks. kan få $r(x)$ til å passe bra over intervallet fra a til b - 1, for eksempel, kan en jo definere $r(b) = \infty$. Hvis $\check{\underset{\sim}{\theta}} = (\check{c}, \check{a}, \check{\lambda}, \ldots)$ er de verdiene en får ved å estimere c og å tilpasse $r(x)$ i (12) til $\{\hat{\gamma}_\alpha : x = a, a+1, \ldots, b-1\}$, kan en sette

$$\check{H}(x) = \check{c}\,\{1 - e^{-\int_0^x r(s,\, \check{\underset{\sim}{\theta}})\, ds}\} \text{ for } 0 \leqq x \leqq b-1, \qquad \check{H}(b) = \check{c}$$

(eventuelt med lineær eller annen interpolasjon for $b - 1 < x < b$),

$$\check{h}(x) = \check{c}\, r(x, \check{\theta})\, e^{-\int_0^x r(s,\, \check{\underset{\sim}{\theta}})\, ds} \text{ for } 0 \leqq x \leqq b-1,$$

$$\check{\nu}(x) = \check{h}(x)/\{1 - \check{H}(x)\} \text{ for } 0 \leqq x < b, \text{ osv.}$$

I denne sammenhengen vil man trenge å beregne integralet

$$I(x) = \int_a^x r(y)\, dy = \int_a^x \frac{\lambda}{\sigma} \exp\{-\eta e^{-\frac{y-a}{\sigma}}\}\, dy.$$

Dette er ikke så altfor vanskelig, og beregningen forenkles noe på følgende vis:

Innfør $s = \eta e^{-(y-a)/\sigma}$ som ny integrasjonsbokstav. Det gir

$$I(x) = \lambda \int_{s(x)}^{\eta} s^{-1} e^{-s}\, ds, \text{ med } s(x) = \eta e^{-(x-a)/\sigma}.$$

Dette integralet beregnes lett numerisk eller ved hjelp av den ufullstendige gammafunksjonen.

6. Valg av glattingsmetode

Ovenfor har vi notert oss tre mulige innfallsvinkler når det gjelder analytisk glatting av de rå dataene:

(i) glatting av $\hat{\underset{\sim}{\nu}}$,

(ii) glatting av $\hat{\underset{\sim}{h}}$, og

(iii) glatting av $\hat{\underset{\sim}{\gamma}}$.

Ingen av disse er a priori "riktigere" enn de to andre. Valg av metode kan ikke bygge på teologiske forhåndsvurderinger, men på de teoretiske og praktiske egenskapene som metodene har.

Av de tre alternativene synes jeg at vi skal skyve det siste til side, i det minste foreløpig. For meg ser det ut for at det ennå er litt fler praktiske problemer knyttet til dette alternativet enn til de to andre, og det har vel også et noe svakere teoretisk grunnlag, i og med den feilen ved tilpasningsfunksjonen $r(\cdot)$ som jeg har påpekt. Jeg vil derfor her konsentrere meg om de to første.

La oss si at en faktisk kan bruke $\nu(x) = f(x, \underset{\sim}{\theta})$ for en passende f med en rimelig parametrisering $\underset{\sim}{\theta}$. Da er

$$h(x) = f(x, \underset{\sim}{\theta})\, e^{-\int_0^x f(y,\, \underset{\sim}{\theta})\, dy} \equiv \bar{f}(x, \underset{\sim}{\theta}),$$

slik at vi i prinsippet får en tilsvarende parametrisk representasjon av h. I stedet for å glatte $\hat{\underset{\sim}{\nu}}$ med f, kunne en derfor glatte $\hat{\underset{\sim}{h}}$ med $\bar{f}$. Resultatet ville neppe bli nøyaktig det samme. Glatting av $\hat{\underset{\sim}{\nu}}$

vil gi en estimator $\hat{\underset{\sim}{\theta}}$ for $\underset{\sim}{\theta}$, og glatting av $\hat{\underset{\sim}{h}}$ vil gi en estimator $\hat{\hat{\underset{\sim}{\theta}}}$ som neppe faller helt sammen med $\hat{\underset{\sim}{\theta}}$. I praksis vil forskjellen mellom $\hat{\underset{\sim}{\theta}}$ og $\hat{\hat{\underset{\sim}{\theta}}}$ imidlertid neppe bli særlig stor, og jeg vil i hvert fall bli svært overrasket dersom optimalt valg av tilpasningsmetode i hvert tilfelle (dvs. for $\hat{\underset{\sim}{\theta}}$ og $\hat{\hat{\underset{\sim}{\theta}}}$ hver for seg) skulle gi de to estimatorene vesentlig forskjellige statistiske egenskaper. De blir begge asymptotisk normalfordelte med forventning $\underset{\sim}{\theta}$, og jeg er ganske sikker på at de får samme kovariansmatrise.

Tilsvarende om en lar h og ν bytte plass i ovenstående resonnement, og likeledes om en trekker inn γ.

Valget mellom glattingsalternativene (i) og (ii) kommer derfor til å bestemmes av hvilken av de to kurvene en kan finne en god tilpasningsfunksjon til. Dét er det bare en empirisk undersøkelse som kan vise. En må simpelthen prøve dem begge.

7. Konklusjon

Det ser ut til å være fornuftig å forsøke å glatte både $\hat{\underset{\sim}{\nu}}$ og $\hat{\underset{\sim}{h}}$ hver for seg for å finne ut hvilken av dem som best lar seg tilpasse med en pen funksjon. En må da prøve seg med noen av de glattingsfunksjoner som har vært brukt før, f.eks. Hadwiger-funksjonen og Coale-McNeils generalisering av gumbeltettheten (pkt. 4 ovenfor). Inntil videre synes jeg at en skal la glatting av $\hat{\underset{\sim}{\gamma}}$ ligge.

Referanser

Coale, Ansley J. (1971): "Age patterns of marriage." Population Studies 25:193-214.

Coale, Ansley J. and D.R. McNeil (1972): "The distribution by age of the frequency of first marriage in a female cohort." JASA 67: 743-749.

Johnson, Norman L. and Samuel Kotz (1970): "Distributions in statistics: Continuous uninvariate distributions." Houghton Mifflin Co., Boston.